

Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de

# Concreto Armado

4ª. Edição

Segundo a NBR 6118:2014

Roberto Chust Carvalho  
Jasson Rodrigues de Figueiredo Filho



EdUFSCar

# **CÁLCULO E DETALHAMENTO DE ESTRUTURAS USUAIS DE CONCRETO ARMADO**

SEGUNDO A NBR 6118:2014

4ª EDIÇÃO



REITOR Targino de Araújo Filho  
VICE-REITOR Adilson J. A. de Oliveira  
DIRETOR DA EDUFSCAR Oswaldo Mário Serra Truzzi

EdUFSCar - Editora da Universidade Federal de São Carlos

CONSELHO EDITORIAL Ana Claudia Lessinger  
José Eduardo dos Santos  
Marco Giulletti  
Nivaldo Nale  
Oswaldo Mário Serra Truzzi (Presidente)  
Roseli Rodrigues de Mello  
Rubismar Stolf  
Sergio Pripas  
Vanice Maria Oliveira Sargentini

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Editora da Universidade Federal de São Carlos

Via Washington Luís, km 235

13565-905 - São Carlos, SP, Brasil

Telefax (16) 3351-8137

[www.editora.ufscar.br](http://www.editora.ufscar.br)

[edufscar@ufscar.br](mailto:edufscar@ufscar.br)

Twitter: @EdUFSCar

Facebook: [facebook.com/editora.edufscar](https://www.facebook.com/editora.edufscar)

# **CÁLCULO E DETALHAMENTO DE ESTRUTURAS USUAIS DE CONCRETO ARMADO**

SEGUNDO A NBR 6118:2014

Roberto Chust Carvalho  
Jasson Rodrigues de Figueiredo Filho

4ª EDIÇÃO



**EdUFSCar**  
São Carlos, 2014

**Capa**  
Gustavo Duarte

**Projeto gráfico**  
Vitor Massola Gonzales Lopes

**Preparação e revisão de texto**  
Marcelo Dias Saes Peres  
Daniela Silva Guanais Costa  
Audrey Ludmilla do Nascimento Miasso

**Editoração eletrônica**  
Guilherme José Garbuio Martinez

1ª edição - 2001

2ª edição - 2004

3ª edição - 2007

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

---

C331c.4      Carvalho, Roberto Chust.  
                Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto  
                armado : segundo a NBR 6118:2014 / Roberto Chust  
                Carvalho, Jasson Rodrigues de Figueiredo Filho. -- 4.ed. --  
                São Carlos : EdUFSCar, 2014.  
                415 p.

ISBN - 978-85-7600-356-4

1. Concreto armado. 2. Estruturas. I. Título.

CDD - 624.18341 (20\*)

CDU - 624.012.45

---

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra pode ser reproduzida ou transmitida por qualquer forma e/ou quaisquer meios (eletrônicos ou mecânicos, incluindo fotocópia e gravação) ou arquivada em qualquer sistema de banco de dados sem permissão escrita do titular do direito autoral.

# SUMÁRIO

PREFÁCIO À QUARTA EDIÇÃO .....	13
PREFÁCIO À SEGUNDA EDIÇÃO .....	15
PREFÁCIO À PRIMEIRA EDIÇÃO .....	17
CAPÍTULO I	
INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO .....	19
1.1 Conceitos fundamentais .....	19
1.2 Vantagens e desvantagens do concreto armado .....	21
1.2.1 Vantagens .....	21
1.2.2 Desvantagens .....	22
1.3 Pequeno histórico .....	22
1.4 Sistemas e elementos estruturais .....	23
1.5 Normas técnicas .....	27
1.6 Características e propriedades do concreto .....	29
1.6.1 Concreto fresco .....	30
1.6.1.1 Consistência .....	30
1.6.1.2 Trabalhabilidade .....	30
1.6.1.3 Homogeneidade .....	31
1.6.1.4 Adensamento .....	31
1.6.1.5 Início do endurecimento (pega) do concreto .....	32
1.6.1.6 Cura do concreto .....	32
1.6.2 Concreto endurecido .....	33
1.6.2.1 Resistência à compressão .....	34
1.6.2.2 Resistência característica do concreto à compressão .....	34
1.6.2.3 Resistência do concreto à tração .....	36
1.6.2.4 Diagramas tensão-deformação e módulo de elasticidade do concreto .....	38
1.6.2.4.1 Módulo de elasticidade .....	38
1.6.2.4.2 Diagramas tensão-deformação na compressão segundo a ABNT NBR 6118:2014 .....	40
1.6.2.4.3 Diagramas tensão-deformação na tração segundo a ABNT NBR 6118:2014 .....	42
1.6.2.5 Módulo de elasticidade transversal e coeficiente de Poisson .....	42

1.6.2.6 Diagrama tensão-deformação com carga e descarga (ensaio rápido) .....	42
1.7 Características do aço.....	43
1.8 Dimensionamento (cálculo) de uma estrutura .....	46
1.8.1 Métodos clássicos.....	47
1.8.2 Métodos de cálculo na ruptura (ou dos estados limites) .....	47
1.8.2.1 Valores característicos das resistências .....	49
1.8.2.2 Valores de cálculo das resistências.....	49
1.8.2.3 Valores de cálculo das tensões resistentes.....	49
1.8.2.4 Valores de cálculo da resistência do concreto .....	49
1.8.2.5 Coeficientes de ponderação das resistências .....	51
1.8.2.6 Estados limites .....	52
1.8.3 Ações.....	53
1.8.3.1 Ações permanentes.....	54
1.8.3.2 Ações variáveis.....	54
1.8.3.3 Ações excepcionais .....	56
1.8.3.4 Valores representativos das ações .....	56
1.8.3.5 Valores de cálculo .....	57
1.8.4 Coeficientes de ponderação das ações.....	57
1.8.4.1 Coeficientes de ponderação para os estados limites últimos .....	58
1.8.4.2 Coeficientes de ponderação para os estados limites de serviço .....	60
1.8.5 Combinações das ações .....	60
1.8.5.1 Combinações últimas .....	61
1.8.5.2 Combinações de serviço .....	62
1.8.6 Solicitações.....	63
1.9 Qualidade das estruturas.....	64
1.10 Durabilidade das estruturas de concreto .....	65
1.11 Cuidados a tomar em um projeto para garantir a durabilidade .....	67
Adendo .....	67

## CAPÍTULO 2

### PAVIMENTOS DE EDIFICAÇÕES COM LAJES NERVURADAS

UNIDIRECIONAIS DE VIGOTAS PRÉ-MOLDADAS.....	73
2.1 Introdução .....	73
2.2 Descrição das lajes nervuradas com vigotas pré-moldadas .....	73
2.3 Ação da laje nas vigas do pavimento .....	79
2.3.1 Estudo preliminar.....	79

2.3.2 Demais casos analisados e resultados obtidos.....	86
2.3.3 Análise dos resultados .....	87
2.3.4 Conclusões .....	88
2.4 Determinação das flechas nas lajes pré-moldadas .....	90
2.5 Momento fletor e modelo para o cálculo da armadura.....	90
2.6 Verificação ao cisalhamento .....	92
2.7 Critérios para escolha da laje pré-moldada .....	94
2.7.1 Ações atuantes na laje.....	94
2.7.2 Determinação do tipo de laje.....	95
2.8 Critérios para a escolha da altura de vigas de pavimentos .....	100
2.9 Considerações finais.....	101
Exemplo 1 .....	102
Exemplo 2 .....	103
Exemplo 3 .....	104
Exemplo 4.....	105
Adendo .....	108

## CAPÍTULO 3

CÁLCULO DA ARMADURA DE FLEXÃO .....	111
3.1 Introdução.....	111
3.2 Tipos de flexão .....	112
3.3 Processo de colapso de vigas sob tensões normais.....	113
3.4 Hipóteses básicas para o cálculo.....	115
3.5 Definições e nomenclatura.....	119
3.6 Domínios de deformação na-seção transversal.....	120
3.7 Cálculo da armadura longitudinal em vigas sob flexão normal.....	126
3.7.1 Equacionamento para concretos de classe até C50.....	126
Exemplo 1 .....	130
3.7.2 Equacionamento para concretos de qualquer classe.....	131
Exemplo 2 (é o exemplo 1 com resistência característica do concreto $f_{ck} = 90$ MPa) .....	132
3.7.3 Cálculo do máximo momento resistente da seção .....	133
Exemplo 3 .....	134
3.7.4. Condições de ductilidade em vigas e redistribuição de momentos .....	135
3.7.3 Cálculo do máximo momento resistente da seção, conhecida a armadura longitudinal .....	136

Exemplo 4.....	137
3.7.4 Cálculo da altura mínima de uma seção com armadura simples.....	138
Exemplo 5.....	139
3.7.5 Fórmulas adimensionais para dimensionamento de seções retangulares...	140
Exemplo 6.....	143
3.7.6 Cálculo de seções com armadura dupla.....	144
Exemplo 7.....	146
3.7.7 Cálculo de armadura em vigas de seção transversal em forma de "T".....	147
Exemplo 8.....	151
Exemplo 9.....	152
Exercícios resolvidos.....	154
Exercícios propostos.....	161
Adendo A.....	163
Adendo B.....	169

## CAPÍTULO 4

DETALHAMENTO DA ARMADURA LONGITUDINAL (FLEXÃO) NA SEÇÃO TRANSVERSAL E ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO.....	173
4.1 Introdução.....	173
4.2 Armadura longitudinal mínima e máxima em uma seção.....	175
4.2.1 Armadura mínima.....	175
4.2.2 Armadura máxima.....	176
4.3 Armadura concentrada.....	176
4.4 Armadura de pele.....	177
4.5 Espaçamentos entre as barras.....	178
4.6 Proteção e cobrimento.....	179
4.7 Análise da fissuração em peças de concreto armado.....	181
4.7.1 Abertura máxima de fissuras.....	181
4.7.2 Controle da fissuração pela limitação da abertura estimada das fissuras...	182
4.7.3 Controle da fissuração sem a verificação da abertura de fissuras.....	184
4.8 Verificação do estado limite de deformação excessiva.....	185
4.8.1 Deslocamentos limites.....	185
4.8.2 Cálculo de deslocamentos em vigas.....	188
4.8.2.1 Características geométricas de seções no estágio I.....	192
4.8.2.2 Características geométricas de seções no estágio II.....	195

4.8.2.3 Efeito da fissuração – modelo simplificado de Branson para flecha imediata.....	197
4.8.2.4 Efeito da fluência do concreto – avaliação da flecha diferida no tempo..	200
Exemplo 1 .....	201
Exemplo 2 .....	215
Exemplo 3 .....	219
Adendo .....	221

## CAPÍTULO 5

### DETALHAMENTO DA ARMADURA LONGITUDINAL AO LONGO DA VIGA.... 225

5.1 Introdução.....	225
5.2 Quantidade de armadura longitudinal ao longo da viga.....	225
5.3 Ancoragem por aderência da armadura longitudinal.....	228
5.3.1 Aderência entre concreto e aço.....	228
5.3.1.1 Determinação da tensão de aderência.....	229
5.3.1.2 Verificação da aderência entre concreto e armadura.....	230
5.3.1.3 Regiões favoráveis ou desfavoráveis quanto à aderência.....	231
5.3.1.4 Valores das resistências de aderência.....	231
5.3.2 Ancoragem das barras .....	232
5.3.2.1 Comprimento básico de ancoragem .....	232
Exemplo 1 .....	233
5.3.2.2 Comprimento necessário de ancoragem .....	234
5.3.2.3 Armadura transversal na ancoragem.....	234
5.3.2.4 Ancoragem de estribos .....	235
5.3.3 Ganchos de ancoragem nas extremidades das barras .....	235
5.3.3.1 Ganchos da armadura de tração .....	235
Exemplo 2 .....	236
Exemplo 3 .....	238
5.3.3.2 Ganchos dos estribos.....	239
5.4 Emendas de barras .....	240
5.4.1 Proporção das barras emendadas .....	240
5.4.2 Comprimento de traspasse de barras isoladas.....	241
5.4.3 Armadura transversal nas emendas por traspasse em barras isoladas.....	242
5.5 Deslocamento do diagrama de momentos fletores (decalagem).....	243
5.5.1 Deslocamento (decalagem) do diagrama de momentos fletores de acordo com o modelo I .....	245

5.5.2 Deslocamento (decalagem) do diagrama de momentos fletores de acordo com o modelo II.....	247
5.6 Ancoragem da armadura de tração junto aos apoios .....	247
5.7 Engastamento viga-pilar .....	248
5.8 Furos e aberturas em vigas .....	250
5.8.1 Furos que atravessam as vigas na direção de sua largura .....	250
5.8.2 Furos que atravessam as vigas na direção da altura .....	250
5.8.3 Canalizações embutidas.....	251
Exemplo 4 (roteiro para detalhamento).....	252
Adendo .....	267

## CAPÍTULO 6

CISALHAMENTO: CÁLCULO DA ARMADURA TRANSVERSAL.....	271
6.1 Introdução.....	271
6.2 Tensões normais e tangenciais em uma viga.....	274
6.3 Tensões principais .....	276
6.4 Analogia de treliça de Morsch .....	279
6.4.1 Funcionamento básico e elementos constituintes .....	279
6.4.2 Cálculo da armadura transversal.....	282
Exemplo 1 .....	287
6.5 Verificação das bielas de concreto comprimidas .....	288
6.5.1 Cálculo das tensões de compressão $\sigma_c$ nas bielas de concreto .....	288
6.5.2 Valores limites das tensões de compressão nas bielas.....	290
6.6 Treliça generalizada de Morsch.....	291
6.7 Estado Limite último de elementos lineares sob força cortante (ABNT NBR 6118:2014).....	292
6.7.1 Hipóteses básicas.....	292
6.7.2 Verificação do estado limite último .....	292
6.7.2.1 Modelo de cálculo I.....	293
Exemplo 2 .....	296
Exemplo 3 .....	298
Exemplo 4 .....	299
6.7.2.2 Modelo de cálculo II .....	300
Exemplo 5 .....	302
6.8 Prescrições para o detalhamento da armadura transversal .....	304
6.8.1 Quantidade mínima de estribos .....	304

6.8.2 Características dos estribos.....	306
6.8.3 Constituição da armadura transversal.....	306
6.8.4 Espaçamento entre elementos da armadura transversal.....	306
6.8.5 Cargas próximas aos apoios.....	307
Exemplo 6.....	307
Adendo.....	311

## CAPÍTULO 7.

PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS COM LAJES MACIÇAS.....	319
7.1 Introdução.....	319
7.2 Métodos de cálculo.....	321
7.3 Método elástico.....	321
7.3.1 Hipóteses de cálculo.....	322
7.3.2 Equação fundamental.....	323
7.3.3 Processos de resolução.....	325
7.3.4 Cálculo por diferenças finitas.....	325
7.3.5 Processo dos elementos finitos.....	325
7.3.6 Processo de grelha equivalente.....	326
7.3.7 Determinação de esforços e deslocamentos por meio de séries.....	327
7.3.7.1 Fundamentos do processo.....	327
7.3.7.2 Utilização de quadros.....	330
7.3.7.2.1 Determinação de flechas.....	331
7.3.7.2.2 Determinação dos momentos máximos nas direções x e y.....	333
7.4 Roteiro para o cálculo de lajes de concreto armado.....	336
7.4.1 Discretização do pavimento.....	336
7.4.2 Pré-dimensionamento da altura das lajes.....	338
7.4.3 Cálculo das cargas atuantes.....	340
7.4.4 Verificação das flechas.....	340
7.4.5 Cálculo dos momentos.....	341
7.4.6 Determinação das armaduras longitudinais.....	341
7.4.7 Reação das lajes nas vigas.....	341
7.4.8 Verificação de lajes-ao cisalhamento.....	347
7.4.8.1 Lajes sem armadura para força cortante.....	347
7.4.8.2 Lajes com armadura para força cortante (item 19.3.2).....	348
7.4.9 Aberturas em lajes.....	349
7.4.10 Vãos efetivos de lajes e placas.....	350

7.4.11 Detalhamento das armaduras .....	350
7.4.11.1 Espaçamento entre barras .....	350
7.4.11.2 Armaduras longitudinais máximas e mínimas .....	351
7.4.11.3 Armadura de distribuição e secundária de flexão .....	352
7.4.11.4 Espaçamento e diâmetro máximo .....	352
7.4.11.5 Quantidade e comprimentos mínimos de armaduras em bordas livres e aberturas .....	352
7.4.11.6 Armadura de tração sobre os apoios .....	352
7.4.11.7 Armadura nos cantos de lajes retangulares e outras recomendações .....	353
Exemplo 1 .....	354
Adendo .....	369

## ANEXO 1

FLEXÃO DE LAJES NERVURADAS UNIDIRECIONAIS CONTÍNUAS COM VIGOTAS PRÉ-MOLDADAS .....	375
Exemplo .....	380

## ANEXO 2

QUADROS DE VÃOS MÁXIMOS E CONTRAFLECHAS PARA LAJES COM VIGOTAS PRÉ-MOLDADAS .....	391
--	-----

## ANEXO 3

CONSIDERAÇÕES SOBRE O CÁLCULO DE LAJES MACIÇAS COM ANALOGIA DE GRELHA .....	399
A3.1 Introdução .....	399
A3.2 Processo de analogia de grelha .....	399
A3.3 Situações analisadas .....	401
REFERÊNCIAS .....	409

## PREFÁCIO À QUARTA EDIÇÃO

Depois de mais treze anos, três revisões, várias reimpressões e mais de-dezoito mil exemplares vendidos, esta publicação foi mais uma vez revista, resultando na sua quarta edição. Foram mantidos o formato e a sequência das edições anteriores. Para facilitar o uso e a aplicação dos assuntos contidos, foram criados adendos (para cada capítulo) em que se reúnem as fórmulas empregadas. Uma revisão ampla do texto e exercícios foi realizada para adaptar o conteúdo às prescrições da norma ABNT NBR 6118:2014. Agora, o texto contempla o cálculo de elementos em que se usa concreto de classes C50 a C90.

Continua sendo um livro didático destinado a alunos de cursos de graduação em engenharia civil e profissionais que desejem aprofundar conhecimentos no cálculo e detalhamento de estruturas de concreto armado.

Os autores agradecem a todos que direta ou indiretamente participaram da confecção desta obra, sem se esquecer dos colegas (docentes e funcionários) do Departamento de Engenharia Civil, da direção e funcionários da Editora e da própria Universidade Federal de São Carlos.

*Roberto Chust Carvalho*  
*Jasson Rodrigues de Figueiredo Filho*

## PREFÁCIO À SEGUNDA EDIÇÃO

O conteúdo deste livro sofreu algumas alterações e correções em relação à edição anterior, tendo sido acrescentados anexos e outros exemplos. Continua sendo um livro didático destinado a alunos de cursos de graduação em Engenharia Civil e a profissionais que desejarem se aprofundar em conhecimentos sobre cálculo e detalhamento de estruturas de concreto armado.

Entretanto, a principal motivação de apresentar uma nova edição foi a entrada em vigor da NBR 6118:2003, que passou a ter validade em março de 2003. Dessa forma, foram retiradas desta edição todas as referências à versão anterior da NBR 6118 (algumas citações foram mantidas, quando se julgou oportuno) e atualizadas as referências quanto à versão atual (na edição anterior, o texto estava fundamentado na proposta de 1999).

Não houve alteração na sequência de apresentação dos assuntos nem dos capítulos, em que se procurou seguir a lógica do projeto de estruturas de edificações usuais.

Como novidade, em três anexos, são apresentados alguns temas que foram julgados importantes, mas que poderiam comprometer a sequência lógica que se quis conferir aos assuntos, se colocados no corpo principal do livro.

Para realizar esta obra, os autores continuaram contando com o apoio, a participação e sugestões de colegas docentes e alunos que cursaram as disciplinas de Construções de Concreto do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos ao longo do tempo.

Também foi fundamental, para esta nova edição, a contribuição de monitores na verificação e correção de exercícios e atualização do texto, bem como as instituições de fomento à pesquisa, FAPESP e CNPq, que, por meio da concessão de auxílios e bolsas de iniciação científica, contribuíram para aprofundar alguns dos tópicos.

A todos os demais que colaboraram os autores agradecem, sem esquecer dos colegas (docentes e funcionários) do Departamento de Engenharia Civil, da direção e dos funcionários da Editora e da própria Universidade Federal de São Carlos.

*Roberto Chust Carvalho  
Jasson Rodrigues de Figueiredo Filho*

## PREFÁCIO À PRIMEIRA EDIÇÃO

Esta publicação é fruto da experiência acadêmica dos autores em diversas instituições de ensino, em cursos de graduação e especialização, e da vivência adquirida na participação em inúmeros projetos de estruturas de concreto.

Trata-se de um livro didático destinado a alunos do curso de engenharia civil e profissionais que desejam aprofundar seus conhecimentos de cálculo e detalhamento de estruturas de concreto armado. São apresentados fundamentos teóricos básicos, acompanhados de exemplos práticos.

A sequência de apresentação dos assuntos procurou seguir a lógica do projeto de estruturas de edificações usuais.

O primeiro capítulo contém um resumo das principais características mecânicas dos materiais, concreto e aço, assim como noções sobre composição de sistemas estruturais de concreto armado. É complementado com a introdução de conceitos sobre procedimentos de cálculo, estados limites, ações e suas combinações.

No segundo capítulo são estudadas as lajes constituídas por nervuras pré-moldadas, que, embora intensamente utilizadas na prática, não têm sido abordadas com frequência em publicações técnicas. Mostra-se como considerar as ações atuantes e como podem ser escolhidos os diversos tipos de lajes (altura e armadura). Discute-se o comportamento das mesmas e como determinar suas ações nas vigas do contorno da laje.

No capítulo 3 é desenvolvida a teoria do estado limite último de esgotamento da capacidade resistente para seções transversais submetidas à flexão simples normal. São particularmente estudadas as seções retangulares, com armadura simples e dupla, e as em forma de "T".

O detalhamento da armadura longitudinal na seção transversal e ao longo da viga, bem como as verificações de estado limite de serviço (fissuração e deformação), está nos capítulos 4 e 5.

A teoria do estado limite último de esgotamento da capacidade resistente devido às solicitações tangenciais é desenvolvida no sexto capítulo, juntamente com o detalhamento da armadura transversal.

No último capítulo são estudados a teoria e os processos de cálculo de lajes maciças à flexão e o detalhamento da armadura resultante.

Este livro foi escrito, inicialmente, com base na NB 1/80 (Cálculo e Execução de Estruturas de Concreto Armado), acrescentando-se posteriormente as principais considerações contidas no texto-base da nova NB 1, disponibilizada em 1999.

Faz parte do projeto dos autores a edição de um segundo volume, que deverá conter cálculo e detalhamento de pilares, escadas, outros tipos de lajes e fundações (sapatas e blocos).

Para a realização desta obra, os autores contaram com o apoio, participação e sugestões de centenas de alunos que cursaram, durante mais de uma década, as disciplinas de Construções de Concreto 1, 2, 3 e 4, oferecidas pelo Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de São Carlos.

Também foi fundamental a contribuição de monitores das referidas disciplinas na verificação e correção de exercícios, bem como das instituições de fomento à pesquisa, FAPESP e CNPq, que, por meio da concessão de auxílios e bolsas de iniciação científica, contribuíram para o aprofundamento de alguns dos tópicos constantes do livro, principalmente aqueles relacionados às lajes com nervuras pré-moldadas.

Destaca-se, particularmente, a atuação do desenhista Dimas Milanetto, que iniciou o trabalho gráfico, e do ex-aluno engenheiro Anderson Manzolli, que digitalizou de forma primorosa e cuidadosa a maioria das figuras do trabalho.

Os autores agradecem a todos, sem esquecer os colegas do Departamento de Engenharia Civil, da Editora e da própria Universidade Federal de São Carlos.

*Roberto Chust Carvalho  
Jasson Rodrigues de Figueiredo Filho*



## INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

### 1.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

O concreto é um material composto de água, cimento e agregados. Associando-se esses materiais, o resultado é:

- **Pasta:** cimento + água;
- **Argamassa:** pasta + agregado miúdo;
- **Concreto:** argamassa + agregado graúdo;
- **Microconcreto:** concreto em que o agregado graúdo tem dimensões reduzidas;
- **Concreto de alto desempenho:** considera-se, em geral, o concreto em que a resistência à compressão supera os 50 MPa; inicialmente denominado de concreto de alta resistência, passou a ser chamado de concreto de alto desempenho devido à melhoria de outras propriedades que, principalmente, elevam a ductibilidade das estruturas; para obtê-lo, é preciso geralmente incorporar microsilica e aditivos químicos, o que não será tratado neste trabalho. Cabe destacar que a ABNT NBR 6118:2014, recém-aprovada, passa a ser aplicada a concretos com resistência à compressão de até 90 MPa.

Como o cimento é um material caro, o principal objetivo da utilização do agregado de maiores dimensões é reduzir os custos sem que a qualidade do material seja muito prejudicada.

Para utilização estrutural, o concreto sozinho não é adequado como elemento resistente, pois, enquanto tem uma boa resistência à compressão, pouco resiste à tração (cerca de 1/10 da resistência à compressão), embora esse tipo de sollicitação quase sempre esteja presente nas estruturas das construções usuais. Exemplos clássicos são os elementos fletidos, em que em uma mesma seção transversal existem tanto tensões de compressão quanto de tração, como na viga da Figura 1.1.

No trecho BC, submetido à flexão pura, dependendo da intensidade dos esforços atuantes podem ocorrer fissuras (minúsculas trincas causadas por pequena deformabilidade e baixa resistência à tração do concreto) na parte inferior, que está submetida a tensões normais de tração. Essas fissuras fazem com que a capacidade resistente da viga ao momento fletor seja pequena.

Conseqüentemente, para aumentar a resistência da viga é importante associar o concreto a um material que tenha boa resistência à tração e seja mais deformável, sendo mais comum o aço, que deve então ser colocado longitudinalmente na região tracionada da peça.

• Dessa maneira, os dois materiais, concreto e aço, deverão trabalhar solidariamente, o que é possível devido às forças de aderência entre a superfície do aço e concreto, pois as barras de aço tracionadas (armadura tracionada) só funcionam quando, pela deformação do concreto que as envolve, começam a ser alongadas, o que caracteriza as armaduras passivas. É a aderência que faz com que o concreto armado se comporte como material estrutural.

Identificam-se, assim, as principais características das estruturas de concreto armado: concreto e armadura trabalhando em conjunto devido à aderência e à possibilidade de ocorrência de regiões fissuradas de concreto. Estes dois princípios básicos estarão sempre presentes nas discussões e considerações de detalhamento nos próximos capítulos.

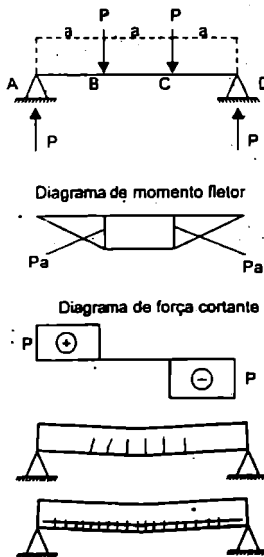


Figura 1.1 Comportamento de uma viga de concreto simplesmente apoiada.

Dependendo do tipo de associação entre a argamassa, o concreto e o aço, pode-se ter:

a) **Argamassa armada ou microconcreto armado:** obtidos pela associação da argamassa simples (cimento e areia) e armadura de pequeno diâmetro e pouco espaçada,

distribuída uniformemente em toda a superfície e composta, principalmente, de fios e telas de aço.

- b) **Concreto com fibras:** obtido pela adição de fibras metálicas ou poliméricas durante o preparo do concreto, fazendo com que depois de seco o concreto (matriz) esteja ligado pelas fibras (pontes) que o atravessam em todas as direções; é empregado em peças com pequenos esforços, tais como piso de concreto sobre o solo; as fibras servem também para reforçar o combate à fissuração, substituindo ou diminuindo a quantidade de armadura superficial ou estribos necessários nos elementos de concreto armado.
- c) **Concreto armado:** obtido por meio da associação entre concreto simples e armadura convenientemente colocada (armadura passiva), de tal modo que ambos resistam solidariamente aos esforços solicitantes.
- d) **Concreto protendido:** obtido por meio da associação entre o concreto simples e a armadura ativa (aplica-se uma força na armadura antes da atuação do carregamento na estrutura).

É interessante ressaltar que o concreto e o aço têm coeficientes de dilatação térmica próximos ( $\alpha_{\text{conc}} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  e  $\alpha_{\text{aço}} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ) e também que o concreto, ao envolver o aço, o protege satisfatoriamente, em condições normais, contra a oxidação e altas temperaturas.

No caso do concreto protendido, a armadura ativa é usada para introduzir forças especiais (normalmente de compressão no concreto) antes da fase de utilização da estrutura, de tal forma que sejam eliminadas as tensões de tração (ou existam de forma limitada) com as cargas de uso (serviço).

A operação de tracionar a armadura ativa é chamada de protensão e confere à estrutura um acréscimo de resistência, em relação ao concreto armado, sob cargas de serviço e ruptura, além de impedir, ou limitar, a fissuração.

## 1.2 VANTAGENS E DESVANTAGENS DO CONCRETO ARMADO

Como todo material que se utiliza para determinada finalidade, o concreto armado apresenta vantagens e desvantagens quanto ao seu uso estrutural.

### 1.2.1 VANTAGENS

- Apresenta boa resistência à maioria das solicitações.
- Tem boa trabalhabilidade, e por isso se adapta a várias formas, podendo, assim, ser escolhida a mais conveniente do ponto de vista estrutural, dando maior liberdade ao projetista.

- Permite obter estruturas monolíticas, o que não ocorre com as de aço, madeira e pré-moldadas. Existe aderência entre o concreto já endurecido e o que é lançado posteriormente, facilitando a transmissão de esforços.
- As técnicas de execução são razoavelmente dominadas em todo o país.
- Em diversas situações, pode competir com as estruturas de aço em termos econômicos.
- É um material durável, desde que seja bem executado, conforme as normas, e evitado o uso de aceleradores de pega, cujos produtos químicos podem corroer as armaduras.
- Apresenta durabilidade e resistência ao fogo superiores em relação à madeira e ao aço, desde que os cobrimentos e a qualidade do concreto estejam de acordo com as condições do meio em que está inserida a estrutura.
- Possibilita a utilização da pré-moldagem, proporcionando maior rapidez e facilidade de execução.
- É resistente a choques e vibrações, efeitos térmicos, atmosféricos e desgastes mecânicos.

### 1.2.2 DESVANTAGENS

- Resulta em elementos com maiores dimensões que o aço, o que, com seu peso específico elevado ( $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$ ), acarreta em peso próprio muito grande, limitando seu uso em determinadas situações ou elevando bastante seu custo.
- As reformas e adaptações são, muitas vezes, de difícil execução.
- É bom condutor de calor e som, exigindo, em casos específicos, associação com outros materiais para sanar esses problemas.
- São necessários um sistema de fôrmas e a utilização de escoramentos (quando não se faz uso da pré-moldagem) que geralmente precisam permanecer no local até que o concreto alcance resistência adequada.

## 1.3 PEQUENO HISTÓRICO

É apresentado, a seguir, um resumo cronológico dos fatos mais importantes do início da utilização do concreto armado.

- **1824:** o francês J. Aspdin inventa o cimento Portland.
- **1855:** o francês J. L. Lambot constrói um barco com argamassa de cimento reforçada com ferro.
- **1861:** o francês J. Monier constrói um vaso de flores de concreto com armadura de arame. F. Coignet, também francês, publica os princípios básicos para as construções em concreto armado.

- 1867: J. Monier obtém uma patente para seus vasos; nos anos seguintes, obtém outras para tubos, placas etc. F. Coignet apresenta, na Exposição Internacional de Paris, vigas e tubos de concreto armado.
- 1873: o americano W. E. Ward constrói em Nova York uma casa de concreto armado – o Ward's Castle, que existe até os dias de hoje.
- 1888: Dohring, de Berlim, obtém uma patente segundo a qual é possível aumentar a resistência de placas e pequenas vigas por meio de protensão da armadura; com ela, aparece pela primeira vez o conceito de protensão provocada deliberadamente.
- 1900: início do desenvolvimento da teoria do concreto armado por Koenen; posteriormente, Morsch desenvolve a teoria iniciada por Koenen, com base em numerosos ensaios. Os conceitos desenvolvidos constituíram-se, ao longo de décadas e em quase todo o mundo, nos fundamentos da teoria do concreto armado, que, em seus princípios fundamentais, são válidos até hoje.
- 1904: são publicadas, na Alemanha, as “Instruções provisórias para preparação, execução e ensaio de construções de concreto armado”.

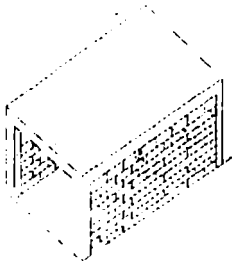
## 1.4 SISTEMAS E ELEMENTOS ESTRUTURAIS

Antes de se iniciar o estudo do concreto armado, é importante analisar o comportamento de uma estrutura bem simples (a parte da construção que resiste às diversas ações e garante o equilíbrio das edificações), para que seja feita a distinção entre sistema estrutural e elemento estrutural.

**Elementos estruturais** são peças, geralmente com uma ou duas dimensões preponderantes sobre as demais (vigas, lajes, pilares etc.), que compõem uma estrutura. O modo como são arranjados pode ser chamado de **sistema estrutural**. Alguns comportamentos são dependentes apenas desse arranjo, não influenciando o material com que são feitos os elementos. Uma viga biapoiada, com seção transversal na forma de I, pode ser executada tanto em aço quanto em concreto armado. Na Figura 1.2 é mostrado um pequeno edifício e os elementos componentes de sua estrutura em concreto armado.

É importante inicialmente, antes de abordar os processos que possibilitam o cálculo de uma estrutura, entender, ainda que simplificada, o processo de produção da mesma. É intuitivo perceber que uma estrutura de concreto armado (ou mesmo seus elementos), depois de pronta, deve pesar algumas toneladas (ou newtons correspondentes), e que, portanto, se não houver equipamentos adequados é impossível produzi-la de uma só vez; tem-se, então, de executá-la por “pedaços”, ou seja, confeccionando pequenas quantidades de concreto, transportando-as aos poucos (alguns quilos) e depositando-as nas formas, já preparadas e com as armaduras posicionadas.

Edifício com estrutura em concreto armado moldado no local



Estrutura com seus elementos componentes

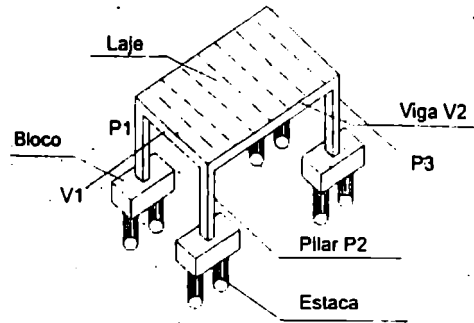


Figura 1.2 Edifício com estrutura em concreto moldado no local e seus elementos.

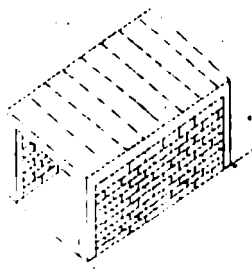
• Porém, se houver a necessidade de executar um grande número de estruturas (ou elementos) em pouco tempo, será possível utilizar o mesmo procedimento anterior? Não seria mais lógico e interessante fazer diversas peças de maneira simultânea? Neste caso, cada elemento não poderia ser feito em outro local, transportado até a obra e colocado em sua posição final de funcionamento? Caso não se disponha de equipamentos adequados (elevação e transporte, fôrmas etc.), seria mais viável adquiri-los ou alugá-los?

A resposta a cada uma dessas questões depende de muitos fatores e de cada situação, mas é possível perceber que, basicamente, pode-se optar por um entre dois tipos de estruturas: as **moldadas no local** e as **pré-moldadas**.

No primeiro caso, os diversos elementos são moldados (concretados) no local onde serão trabalhados; para isso, além das fôrmas, deverá haver um sistema de escoramento adequado (suporte estrutural). Embora seja possível identificar esses elementos, não existe uma separação física entre os mesmos (Figura 1.2).

No segundo caso, os elementos são apenas montados no local definitivo e, portanto, é praticamente eliminada a necessidade de escoramento. Na Figura 1.3, a mesma edificação da Figura 1.2 é mostrada, agora, porém, com o sistema estrutural com elementos pré-moldados. Neste caso, é mais fácil identificar os elementos componentes da estrutura, pois de fato cada um é produzido de maneira independente. De qualquer maneira, é evidente que as hipóteses de cálculo a empregar na análise estrutural deverão levar em conta o tipo de estrutura escolhida.

Edifício com estrutura em concreto armado moldado no local



Estrutura com seus elementos pré-moldados

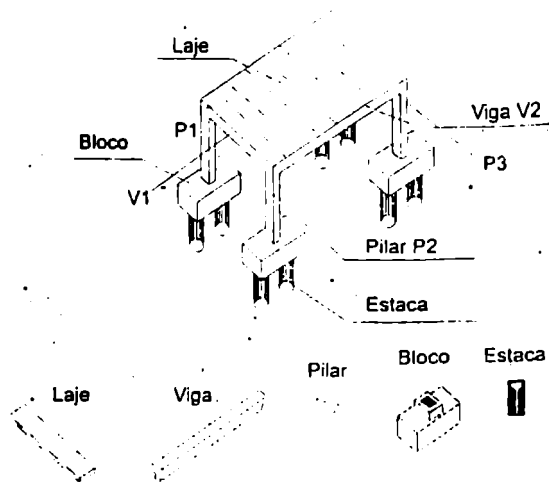


Figura 1.3 Esquema do edifício da Figura 1.2 com elementos pré-moldados.

No caso das estruturas em concreto armado moldadas no local, a interpretação e a análise do comportamento real da estrutura são, geralmente, complexas e difíceis, e nem sempre possíveis. Por essa razão, é importante entender que para montar modelos físicos e matemáticos que representem essas estruturas é preciso usar a técnica da **discretização**, que consiste em desmembrá-las em elementos cujos comportamentos possam ser admitidos já conhecidos e de fácil estudo. Essa técnica possibilita que se consiga, da maneira mais simples possível, analisar uma estrutura com resultados satisfatórios.

No caso das peças pré-moldadas, os modelos adotados na discretização são mais próximos da realidade, pois os elementos são feitos isoladamente com pouca continuidade em suas ligações (elas podem ser flexíveis ou semirrígidas, dependendo da maneira como são projetadas e executadas).

Fica clara agora a principal diferença entre a estrutura com concretagem no local e a pré-moldada: a primeira, desde que tenha armadura detalhada adequadamente, tem comportamento **monolítico** (um só elemento), enquanto a segunda, em geral, não tem monolitismo entre seus elementos. Assim, no caso das estruturas pré-fabricadas, seus elementos devem normalmente ser dimensionados como isolados, e também para as ações que recebem nas operações de transporte e lançamento.

Na possibilidade de se optar, em uma determinada situação, por um sistema pré-moldado, ainda uma questão deverá ser resolvida: os elementos serão produzidos no próprio canteiro (nesse caso, será necessário providenciar fôrmas) ou serão encomendados de fabricantes especializados? Também nessa situação não é possível uma resposta

exata, mas a tendência atual é empregar estruturas pré-moldadas encomendadas, pois para produzi-las em canteiro seria preciso um investimento inicial muito grande, o que, na maioria das vezes, não é compensador.

Portanto, qualquer que seja a solução adotada, é importante compreender adequadamente o funcionamento e o comportamento de cada um dos elementos que formam o conjunto estrutural. Como exemplo, veja a estrutura da Figura 1.4, a mesma da Figura 1.2.

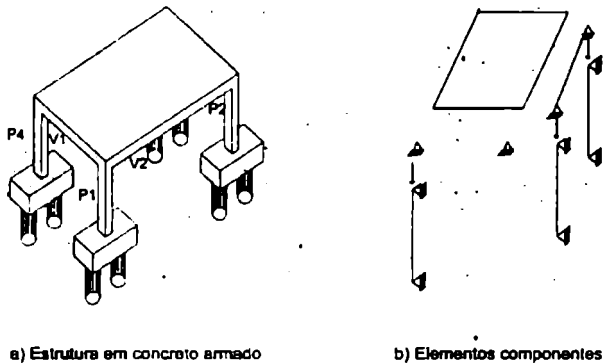


Figura 1.4 Discretização da estrutura da Figura 1.2.

A estrutura pode ser considerada como a de uma garagem para carros (Figura 1.4a), cuja discretização pode ser feita da seguinte maneira (Figura 1.4b): a laje de concreto (plana) suporta seu peso, os revestimentos e mais alguma carga acidental (água da chuva, pessoas etc.); as vigas recebem os esforços da laje (placa de concreto) e os transmitem, juntamente com seu próprio peso (mais o peso de parede, se houver), aos pilares; os pilares recebem todas as cargas e as transmitem, também com seu peso, para as fundações (no caso, blocos e estacas).

Dessa forma, já está sendo montado um modelo físico de funcionamento do sistema e para que se possam aplicar os conhecimentos da teoria das estruturas, é necessário fazer algumas simplificações: admite-se que as vigas são apoios indeslocáveis na direção vertical para as lajes; que os pilares são apoios indeslocáveis na vertical para as vigas, e são considerados, de modo simplificado, como birrotulados em suas extremidades; as lajes são simplesmente apoiadas ou totalmente engastadas nas vigas; as ações nas vigas são uniformemente distribuídas etc. Note, observando a Figura 1.4b, que a viga 1 descarrega nos pilares P1 e P4 e a viga 2 nos pilares P1 e P2; para encontrar a carga atuante no pilar P1, é preciso somar as reações das vigas 1 e 2.

Com essas simplificações, é possível identificar algumas das estruturas estudadas em teoria das estruturas e calcular os esforços solicitantes máximos nas seções, com a ajuda dos conceitos da resistência dos materiais. Os processos físico e matemático que possibili-

tam o cálculo e o detalhamento dos diversos elementos de concreto armado em que ficou dividida a estrutura serão abordados em todos os seus aspectos nos próximos capítulos.

Por outro lado, com o advento dos computadores pessoais e dos programas profissionais (que detalham e geram pranchas de forma e de armação) de cálculo estrutural, em muitos casos é possível um estudo global sem o uso da discretização. A Figura 1.5 mostra a mesma estrutura da Figura 1.2, adotando-se dois modelos para resolvê-la. No primeiro, são usadas barras prismáticas: a laje é representada por uma grelha e as vigas e pilares por barras prismáticas (com seis esforços por nó), podendo-se fazer a análise (cálculo de momentos e deformações) da estrutura considerando-a espacial. No segundo modelo, a laje é representada por uma grelha equivalente; os esforços da grelha são aplicados no pórtico espacial formado pelos pilares e vigas e que considera o efeito diafragma da laje. Há também a possibilidade de se usar Elementos Finitos principalmente para representar a laje.

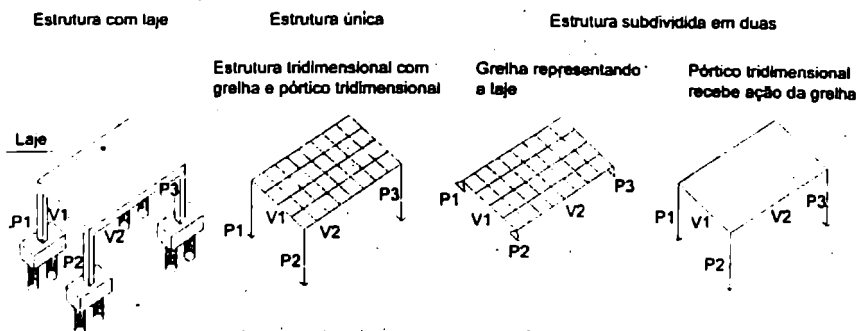


Figura 1.5 Consideração do esquema da estrutura da Figura 1.2.

Concluindo, é importante destacar que para determinar o esforço que a fundação transmite ao solo deve-se efetuar o cálculo (quando se usa a técnica da discretização) na seguinte sequência: lajes, vigas, pilares (superestrutura) e fundações (infraestrutura); note que o cálculo é efetuado na sequência inversa da construção.

## 1.5 NORMAS TÉCNICAS

Com o intuito de promover uma padronização na confecção de projetos, na execução e no controle das obras e dos materiais que garanta a segurança adequada e a qualidade do produto final, a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) regulamenta os procedimentos a serem empregados por meio de normas específicas. No caso de estruturas de concreto (concreto armado, protendido e pré-moldado), as mais importantes são:

- ABNT NBR 6118:2007: projeto de estruturas de concreto – procedimento.
- ABNT NBR 6118:2014: projeto de estruturas de concreto – procedimento (cancela e substitui a versão de 2007).
- ABNT NBR 6120:1980 (versão corrigida de 2000): cargas para cálculo de estruturas de edificações – procedimento.
- ABNT NBR 8681:2003 (versão corrigida de 2004): ações e segurança nas estruturas – procedimento.
- ABNT NBR 6123:1988 (versão corrigida 2 de 2013): forças devidas ao vento em edificações – procedimento.
- ABNT NBR 14931:2004: execução de estruturas de concreto – procedimento.
- ABNT NBR 9062:2006: projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado.
- ABNT NBR 15200:2012: projeto de estruturas de concreto em situação de incêndio.
- ABNT NBR 15421:2006: projeto de estruturas resistentes a sismos – procedimento.

Destaca-se que a ABNT NBR 6118:2014 (historicamente conhecida como NB-1), de 2014, substitui a ABNT NBR 6118:2007 (versão corrigida da ABNT NBR 6118:2004), e esta já havia cancelado e substituído as normas ABNT NBR 6119:2001 (Cálculo e execução de lajes mistas) e ABNT NBR 7197:1989 (Projeto de estruturas de concreto protendido). Além disso, devido às mudanças havidas na versão da ABNT NBR 6118 em 2003 com relação à de 1980, foi necessário revisar a ABNT NBR 7187:1987 (Projeto e execução de pontes de concreto armado e protendido – procedimento), que passou a ser ABNT NBR 7187:2003 (Projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido – procedimento) e a ABNT NBR 8681:1984 (Ações e segurança nas estruturas – procedimento), que passou a ser ABNT NBR 8681:2003. Como a ABNT NBR 6118 aborda apenas o projeto estrutural, foi necessário também elaborar uma nova norma que trata especificamente da etapa executiva, a ABNT NBR 14931:2004 (Execução das estruturas de concreto – procedimento).

A ABNT NBR 6118 define os critérios gerais e requisitos básicos que regem o projeto das estruturas de concreto simples, armado e protendido, sejam elas de edifícios, pontes e viadutos, obras hidráulicas, arcos, silos, torres, portos ou aeroportos, estruturas *off-shore* etc., mas ela deve ser complementada, quando for o caso, por outras normas brasileiras que estabeleçam critérios para estruturas específicas, tanto no que se refere ao projeto como a técnicas construtivas não convencionais. Aplica-se às estruturas de concretos normais, com massa específica seca maior do que  $2000 \text{ kg/m}^3$ , não excedendo  $2800 \text{ kg/m}^3$ , tanto do grupo I de resistência (C10 a C50) como do grupo II (C55 a C90), conforme classificação da ABNT NBR 8953 (Concreto para fins estruturais – classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência). A ABNT

NBR 6118 não inclui requisitos exigíveis para evitar os estados limites gerados por certos tipos de ação, como sismos, impactos, explosões e fogo; também nesses casos, devem ser consultadas as normas específicas.

Além dessas, podem ser utilizados, desde que com justificativa, alguns regulamentos internacionais, sendo os principais:

- Building Code Requirements for Reinforced Concrete (normas editadas pelo American Concrete Institute (ACI));
- CEB-FIP Model Code (Comite Euro-Internacional du Beton); que sintetiza o desenvolvimento técnico e científico de análise e projeto de estruturas de concreto;
- EUROCODE, que regulamenta o projeto de estruturas de concreto.

Este livro, em todo o seu conteúdo, está de acordo com a ABNT NBR 6118 de 2014 e com todas as demais que lhe são complementares.

## 1.6 CARACTERÍSTICAS E PROPRIEDADES DO CONCRETO

O concreto é obtido por meio da mistura adequada de cimento, agregado fino, agregado graúdo e água. Em algumas situações, são incorporados produtos químicos ou outros componentes, como microsilica, polímeros etc. As adições têm a finalidade de melhorar algumas propriedades, como aumentar a trabalhabilidade e a resistência e retardar a velocidade das reações químicas que ocorrem no concreto.

As diversas características que o concreto endurecido deve apresentar para que possa ser utilizado dependem fundamentalmente do planejamento e dos cuidados na sua execução. O planejamento consiste em definir as propriedades desejadas do concreto, analisar e escolher os materiais existentes ou disponíveis, estabelecer uma metodologia para definir o traço (proporção entre os componentes), os equipamentos para a mistura, o transporte, o adensamento e a cura.

O objetivo aqui não é fornecer orientações gerais sobre a tecnologia de projeto e execução do concreto, mas apenas apresentar alguns conceitos importantes para que, ao se detalhar uma estrutura, sejam especificadas e exigidas tolerâncias a se observar na construção dos elementos de concreto armado.

Há uma tendência entre projetistas, calculistas e engenheiros de obras em se preocupar apenas com a resistência à compressão do concreto, obtida de ensaios com corpos de prova cilíndricos. A resistência à compressão, geralmente, é usada como controle de fabricação, e admite-se que forneça todas as informações relativas à resistência e à deformabilidade do concreto. Tal prática, na verdade, revela a falta de um conhecimento maior do material ou a impossibilidade de executar outros ensaios, por fatores financeiros ou por não serem disponíveis.

### 1.6.1 CONCRETO FRESCO

As principais propriedades do concreto fresco são a **consistência**, a **trabalhabilidade** e a **homogeneidade**. O concreto, mesmo depois de endurecido, é um material composto de elementos em todas as fases, ou seja, gases, líquidos, gel e sólidos, caracterizando-se como essencialmente heterogêneo. O objetivo do preparo do concreto estrutural é obter um material predominantemente sólido com grande resistência e com poucos espaços vazios. É obtido pela adequada hidratação do cimento, de modo que a pasta resultante possa envolver e aderir satisfatoriamente os sólidos presentes.

Uma etapa particularmente importante na fabricação do concreto e na moldagem da estrutura, e que interfere sensivelmente nas suas características finais, é o **adensamento** a que ele é submetido, de modo a ocupar todos os espaços da fôrma, sem deixar vazios e sem que haja a segregação dos seus materiais componentes. Outro fator que interfere nas propriedades do concreto é na qualidade e durabilidade da estrutura é a **cura** a que ele deve ser submetido logo após o adensamento e início da **pega**.

#### 1.6.1.1 Consistência

A primeira propriedade do concreto fresco que deve ser considerada é a sua **consistência**. Consistência corresponde à maior ou menor capacidade que o concreto fresco tem de se deformar; está relacionada ao processo de transporte, lançamento e adensamento do concreto e varia, em geral, com a quantidade de água empregada, granulometria dos agregados e pela presença de produtos químicos específicos.

Concretos com menor consistência devem ser empregados em elementos com alta taxa de armadura, que apresentam maior dificuldade de adensamento. Não havendo grande quantidade de armadura nas peças, é melhor produzir concretos com maior consistência e, em princípio, com menor quantidade de água. Nas peças com eixos ou superfícies inclinadas, tais como escadas e sapatas, o concreto deve ter consistência que garanta a forma adequada das peças, e neste caso ela deve ser menor.

Uma maneira de medir a consistência do concreto é por meio do **abaixamento** que uma quantidade predeterminada de massa, colocada em um molde metálico normalizado de forma tronco cônica, terá quando o molde for retirado; a medida da deformação vertical é chamada de **abatimento** ou *slump*. A determinação da consistência pelo abatimento do tronco de cone é regulamentada pela ABNT NBR NM 67:1998.

De maneira geral, para as peças de concreto armado de pequenas edificações, por terem pequenas taxas de armadura, são especificados concretos com valores baixos de abatimento, sendo necessário, em alguns casos, para um bom adensamento, o uso de produtos químicos que diminuem, por exemplo, o atrito entre as partículas do concreto.

#### 1.6.1.2 Trabalhabilidade

Um concreto com *slump* alto é em geral fácil de ser lançado e adensado, sendo considerado, portanto, de boa trabalhabilidade. O conceito de trabalhabilidade de

- um concreto está ligado basicamente à maneira de efetuar seu adensamento. Existem atualmente os concretos chamados autoadensáveis, que são quase fluidos e não necessitam, em princípio, de nenhuma energia de adensamento para formar um conjunto homogêneo e com características de resistência requeridas. Esses concretos são obtidos com a incorporação de aditivos (compostos químicos especiais que alteram algumas propriedades dos materiais componentes), e não por meio do aumento da quantidade de água, que alteraria a relação água/cimento, causando considerável diminuição da resistência e elevando a porosidade.

A trabalhabilidade de um concreto, assim como sua consistência, depende da granulometria dos materiais sólidos, da incorporação de aditivos e, principalmente, do fator água/cimento (relação entre a quantidade de água e a quantidade de cimento usada na mistura do concreto). O efeito da relação água/cimento na qualidade do concreto está claro na ABNT NBR 6118:2014, em seu item 7.4.2, recomendando que se não houver dados obtidos de ensaios que comprovem o desempenho da estrutura quanto à sua durabilidade, deve-se considerar uma relação água/cimento que respeite determinados valores máximos, estipulados em função da agressividade do meio em que está inserida a estrutura e da resistência especificada para o concreto. Isso é possível em razão da existência de forte correspondência entre a relação água/cimento, a resistência do concreto e sua durabilidade. No item 1.10.2, a questão da durabilidade será abordada de mais detalhadamente.

### 1.6.1.3 Homogeneidade

A distribuição dos agregados graúdos dentro da massa de concreto é um fator importante de interferência na qualidade do concreto. Quanto mais uniformes, ou regulares, os agregados graúdos se apresentarem dispersos na massa, estando totalmente envolvidos pela pasta, sem apresentar desagregação, melhor será a qualidade do concreto, principalmente quanto à permeabilidade e à proteção proporcionada à armadura, além de resultar em um melhor acabamento, sem a necessidade de reparos posteriores. Essa distribuição dos agregados é a homogeneidade; portanto, quanto mais homogêneo o concreto, melhor será a qualidade da estrutura resultante.

Uma homogeneidade satisfatória pode ser conseguida com uma boa mistura do concreto durante a etapa de fabricação, um cuidadoso transporte até o local de utilização na estrutura e, também, tomando-se cuidados no lançamento do concreto nas fôrmas e no adensamento. Os cuidados que se deve ter no transporte, lançamento e adensamento do concreto estão definidos nos itens 9.5 e 9.6 da ABNT NBR 14931:2004, que trata da execução das estruturas de concreto.

### 1.6.1.4 Adensamento

O adensamento do concreto é uma das etapas mais importantes na produção das estruturas e interfere sensivelmente nas características e propriedades finais delas. De

maneira geral, o adensamento para obras de médio e grande porte é feito por meio da aplicação de energia mecânica ao concreto. Consiste basicamente, em um primeiro momento, na separação dos diversos compostos para, depois, misturá-los adequadamente, evitando a formação de bolhas de ar, vazios e segregação de materiais. O adensamento deve fazer com que o concreto preencha todos os recantos das fôrmas.

Para que seja atingido um adensamento satisfatório, o processo mais simples e usual é a vibração mecânica, obtida pela imersão de vibradores na massa de concreto. Existe uma série de recomendações técnicas para o uso de vibradores mecânicos que podem ser encontradas no item 9.6.2 da ABNT NBR 14931:2004 ou em Peixoto et al.,<sup>1</sup> de maneira que não falte energia à mistura, provocando o aparecimento de vazios (bicheiras), ou ocorra um excesso, causando a separação dos elementos (segregação).

#### 1.6.1.5 Início do endurecimento (pega) do concreto

O endurecimento do concreto começa poucas horas após sua produção, e o período entre o início do endurecimento até ele atingir uma situação que possa ser desformado, mesmo sem ter atingido sua resistência total, é chamado de "pega". Usualmente, define-se o início da pega quando a consistência do concreto não permite mais a sua trabalhabilidade, ou seja, não é mais possível lançá-lo nas fôrmas e adensá-lo.

Um meio prático de caracterizar o início da pega é fazendo a medição da profundidade de penetração de uma haste, de peso e tamanho predefinidos, no concreto. Quando a profundidade atingida apresentar um valor menor que um limite preestabelecido, considera-se que está iniciada a pega, devendo-se, então, começar os procedimentos de cura.

No item 9.3.3, a ABNT NBR 14931:2004 recomenda que, em condições normais de clima e de composição do concreto, o intervalo de tempo transcorrido entre o instante em que a água de amassamento entra em contato com o cimento e o final da concretagem não ultrapasse 2h30min. Ainda segundo esse item, a norma estabelece que devem ser tomadas providências para reduzir a perda de água no concreto (cura) imediatamente após as operações de lançamento e adensamento.

#### 1.6.1.6 Cura do concreto

Após o início da pega, a hidratação do concreto se desenvolve com grande velocidade, e nesse período a água existente na mistura tem a tendência de sair pelos poros do material e evaporar. Esta evaporação pode comprometer as reações de hidratação do cimento, fazendo com que o concreto sofra uma diminuição de volume (retração) maior que o usual; essa retração é parcialmente impedida pelas fôrmas e armaduras, gerando tensões de tração que não podem ser resistidas pelo concreto, principalmente por causa de sua pouca idade, causando fissuras que levam à diminuição da resistência final que deveria ser atingida pelo concreto.

1 Peixoto et al. (2002).

Dessa maneira, é necessário tomar medidas que evitem a evaporação precoce ou, até mesmo, o fornecimento de água ao concreto, de modo a conservar a umidade necessária para as reações de hidratação até que as propriedades esperadas para esse concreto sejam atingidas. Ao conjunto dessas medidas dá-se o nome de cura.

A água usada na mistura do concreto não é, em geral, totalmente empregada nas reações químicas, mas parte dela serve para controlar o calor gerado na reação (exotérmica) de hidratação. Nesse caso, deve-se avaliar se é melhor que a cura do concreto ocorra sob baixas ou altas temperaturas; em princípio, as temperaturas altas são benéficas, pois aceleram o processo de ganho de resistência.

Para peças usuais, a cura geralmente consiste em molhar as superfícies aparentes do concreto, ou mesmo molhar constantemente as faces das fôrmas de madeira, evitando a secagem destas. Em elementos de superfícies (lajes de piso, por exemplo), é usual a colocação de materiais que possam ser mantidos encharcados, tais como as esponjas. Outro procedimento, adequado principalmente para as peças pré-moldadas, é a cura a vapor, em que se mantém o ambiente saturado e com temperatura elevada, acelerando-se o ganho de resistência do concreto. Na ABNT NBR 14931:2004, item 10.1, encontram-se algumas indicações para cura e proteção do concreto que ainda não tenha atingido endurecimento satisfatório.

### **1.6.2 CONCRETO ENDURECIDO**

No concreto endurecido, as principais características de interesse são as mecânicas, destacando-se as resistências à compressão e à tração. Ainda não foi possível estabelecer uma lei única para determinar a resistência dos materiais que seja válida para todo tipo de solicitações possíveis. Por isso, no caso do concreto, não se pode deduzir diretamente da resistência que se tenha encontrado em um ensaio relativo a uma determinada solicitação, como, por exemplo, a resistência à compressão, seu comportamento quando submetido a outro tipo de solicitação (flexão, torção, cisalhamento etc.).

Entretanto, no estágio atual de desenvolvimento do cálculo de estruturas de concreto armado, considera-se como aproximação razoável que a resistência do concreto para diversos tipos de solicitações seja função de sua resistência à compressão. Assim, a ABNT NBR 6118:2014, no item 8.2, que trata das propriedades do concreto, apresenta uma série de expressões a partir das quais se obtêm, em função da resistência à compressão, as resistências do concreto para diversos tipos de solicitações. De maneira geral, essas expressões são empíricas.

A resistência do concreto é também função do tempo de duração da solicitação; os ensaios geralmente são realizados de forma rápida, ao passo que, em construções, o concreto é submetido a ações que, em sua maioria, atuam de forma permanente, reduzindo sua resistência ao longo do tempo. Além disso, a resistência medida é influenciada pela forma do corpo de prova e pelas próprias características dos ensaios.

Neste capítulo, apenas algumas características do concreto serão vistas; as outras serão analisadas à medida que for necessário.

### 1.6.2.1 Resistência à compressão

A principal característica do concreto é sua resistência à compressão, a qual é determinada pelo ensaio de corpos de prova submetidos à compressão centrada; esse ensaio também permite a obtenção de outras características, como o módulo de deformação longitudinal (módulo de elasticidade).

Independentemente do tipo de ensaio ou de solicitação, diversos fatores influenciam a resistência do concreto endurecido, dos quais os principais são a relação entre as quantidades de cimento, agregados e água (chamada de traço) e a idade do concreto.

A resistência à compressão, obtida por ensaio de curta duração do corpo de prova (aplicação de carga de maneira rápida), é dada por:

$$f_{cj} = \frac{N_{rup}}{A} \quad (1.1)$$

em que:

$f_{cj}$  – resistência à compressão do corpo de prova de concreto na idade de (j) dias;

$N_{rup}$  – carga de ruptura do corpo de prova; e

A – área da seção transversal do corpo de prova.

No Brasil são utilizados corpos de prova cilíndricos, com diâmetro da base de 15 cm e altura de 30 cm, e também corpos com base de 10 cm e altura de 20 cm. A resistência à compressão do concreto deve ser relacionada à idade de 28 dias (ABNT NBR 6118:2014, item 8.2.4) e será estimada a partir do ensaio de uma determinada quantidade de corpos de prova. A moldagem dos cilindros é especificada pela ABNT NBR 5738:2003 (emenda 1:2008), e o ensaio deve ser feito de acordo com a ABNT NBR 5739:2007.

### 1.6.2.2 Resistência característica do concreto à compressão

Para avaliar a resistência de um concreto à compressão, é necessário realizar um certo número de ensaios de corpos de prova. Os valores da resistência proporcionados pelos distintos corpos de prova são mais ou menos dispersos, variando de uma obra a outra e também de acordo com o rigor com que se confecciona o concreto.

O problema pode ser colocado da seguinte maneira: conhecidos os resultados da resistência à compressão de diversos corpos de prova de um mesmo concreto, qual será o valor da resistência representativa deste?

A ideia inicial é adotar, para tal valor representativo, a média aritmética  $f_{cm}$  dos vários valores obtidos dos ensaios, chamada de **resistência média à compressão**.

Entretanto, esse valor não reflete a verdadeira qualidade do concreto na obra, pois não considera a dispersão dos resultados (entre dois concretos com a mesma resistência média, é mais confiável o que apresenta menor dispersão).

Por isso, tem sido adotado o conceito de resistência característica, uma medida estatística que leva em conta não só o valor da média aritmética  $f_{cm}$  das cargas de ruptura dos ensaios dos corpos de prova, mas também o desvio da série de valores, por meio do coeficiente de variação  $\delta$ .

A ABNT NBR 6118:2014 define, no item 12.2, que os valores característicos  $f_{ck}$  das resistências são os que, num lote do material, têm uma determinada probabilidade de serem ultrapassados, no sentido desfavorável para a segurança, e que usualmente é de interesse a resistência característica inferior  $f_{k,inf}$  (menor que  $f_{cm}$ ), admitida como o valor que tem apenas 5% de probabilidade de não ser atingido pelos elementos do lote.

Define-se então como **resistência característica ( $f_{ck}$ ) do concreto à compressão** o valor que apresenta um grau de confiança de 95%, ou seja,  $f_{ck}$  é o valor da resistência, de modo que 95% dos resultados dos ensaios estejam acima dele, ou 5% abaixo. De acordo com essa definição, e admitindo-se uma distribuição estatística normal dos resultados (curva de Gauss, Figura 1.6), a resistência é expressa pelo quantil de 5% da distribuição:

$$f_{ck} = f_{cm} \cdot (1 - 1,645 \cdot \delta) \text{ ou } f_{ck} = f_{cm} - 1,645 \cdot s \quad (1.2)$$

em que  $f_{cm}$  é a resistência média e  $\delta$  o coeficiente de variação, expresso por

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{f_{ci} - f_{cm}}{f_{cm}} \right)^2} \quad (1.3)$$

sendo  $s = f_{cm} \cdot \delta$  o desvio padrão.

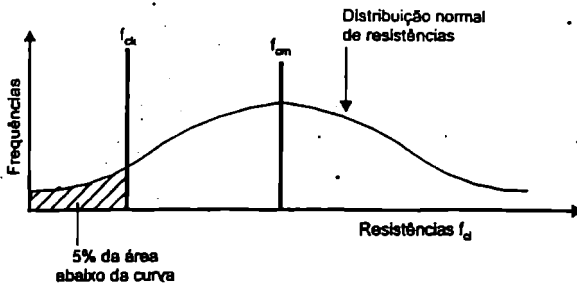


Figura 1.6 Distribuição normal dos resultados – adaptada de Montoya.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Montoya et al. (1991).

Não se deve confundir a expressão de  $f_{ck}$ , que é uma definição (válida para  $n = \infty$ ), com resistência característica estimada, que é o valor que se obtém a partir dos resultados dos ensaios de um número relativamente pequeno de corpos de prová. Por outro lado, para uma resistência  $f_{ck}$  especificada, pode-se estimar a resistência à compressão média  $f_{cm}$  correspondente, que deve ser feita conforme a ABNT NBR 12655:2006.

Na prática, o calculista especifica um valor de  $f_{ck}$  e o usa nos cálculos. Cabe ao construtor fabricar (ou comprar) um concreto com essas características; para isso, pode ensaiar concretos com diversos traços (relação entre água, cimento, areia e brita) até encontrar o adequado. Posteriormente, deve controlar, por meio de um número mínimo de ensaios, se o concreto que está sendo empregado na obra atende à resistência especificada.

A partir da resistência característica, a ABNT NBR 6118:2014 define classes para os concretos, no item 8.2.1, de acordo com a ABNT NBR 8953:2009 (versão corrigida 2011), da seguinte maneira:

Esta norma se aplica aos concretos compreendidos nas classes de resistência dos grupos I e II, da ABNT NBR 8953, até a classe C90.

A classe C20, ou superior, se aplica ao concreto com armadura passiva e a classe C25, ou superior, ao concreto com armadura ativa. A classe C15 pode ser usada apenas em obras provisórias ou concreto sem fins estruturais, conforme a ABNT NBR 8953.

O grupo I corresponde aos concretos até a classe C50, e o grupo II aos concretos das classes superiores até C90. Os números indicadores das classes representam a resistência característica à compressão especificada em MPa para a idade de 28 dias. A armadura passiva é a do concreto armado, pois só funciona após a deformação do concreto, enquanto a ativa é a relativa ao concreto protendido, que passa a funcionar no instante da aplicação da protensão.

### 1.6.2.3 Resistência do concreto à tração

Como o concreto é um material que resiste mal à tração, geralmente não se conta com a ajuda dessa resistência. Entretanto, a resistência à tração pode estar relacionada com a capacidade resistente da peça, como as sujeitas a esforço cortante, e, diretamente, com a fissuração, sendo necessário, por isso, conhecê-la. Existem três tipos de ensaio para se obter a resistência à tração: por flexotração, compressão diametral (tração indireta) e tração direta (Figura 1.7).

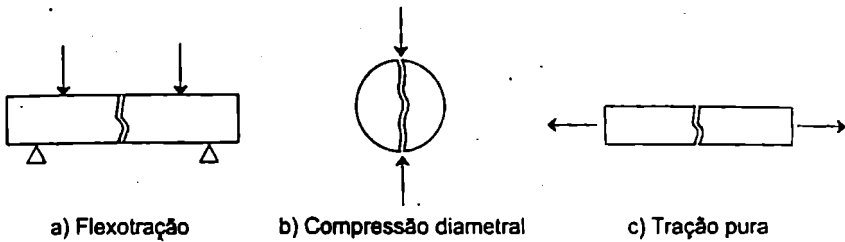


Figura 1.7 Modos de ensaios de resistência do concreto à tração.<sup>3</sup>

A resistência à tração pura (para concretos do grupo I) é aproximadamente 85% da resistência à tração por compressão diametral, e 60% da resistência obtida pelo ensaio de flexotração; este último método não é prático, dada a dificuldade do ensaio. O ensaio de compressão diametral é conhecido como Ensaio Brasileiro de Resistência à Tração, por ter sido sistematizado pelo engenheiro e professor L. F. Lobo Carneiro.

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, item 8.2.5, a resistência à tração indireta  $f_{ct,sp}$  e a resistência à tração na flexão  $f_{ct,f}$  devem ser obtidas em ensaios realizados segundo a ABNT NBR 7222:2011 e a ABNT NBR 12142:2010, respectivamente. Ainda de acordo com o item 8.2.5, a resistência à tração direta  $f_{ct}$  pode ser considerada igual a  $0,9 \cdot f_{ct,sp}$  ou  $0,7 \cdot f_{ct,f}$ . Na falta de ensaios para obtenção de  $f_{ct}$  e  $f_{ct,f}$  pode ser avaliado o seu valor médio ou característico por meio das equações 1.4 a 1.7:

$$f_{ctk,inf} = 0,7 \cdot f_{ct,m} \quad (1.4)$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 \cdot f_{ct,m} \quad (1.5)$$

– para concretos de classes até C50:

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (1.6)$$

– para concretos de classes de C50 até C90:

$$f_{ct,m} = 2,12 \cdot \ln(1 + 0,11 \cdot f_{ck}) \quad (1.7)$$

em que  $f_{ct,m}$  e  $f_{ct}$  são expressos em megapascals (MPa).

Se  $f_{ck} \geq 7$  MPa, estas expressões podem também ser usadas para idades diferentes de 28 dias. O uso de  $f_{ctk,inf}$  ou  $f_{ctk,sup}$  é definido pela norma em cada situação particular.

<sup>3</sup> Id. ibid.

#### 1.6.2.4 Diagramas tensão-deformação e módulo de elasticidade do concreto

Os diagramas tensão-deformação mostram as relações entre tensões ( $\sigma$ ) e deformações ( $\epsilon$ ) do concreto. Na compressão, são obtidos por ensaios de corpos de prova à compressão centrada e apresentam uma parte curva (na classe I é parabólica) e outra sensivelmente retilínea. Na tração, são empregados diagramas bilineares.

Módulo de elasticidade (ou módulo de deformação) é uma grandeza mecânica que mede a rigidez de um material sólido, e pode ser definido a partir das relações entre tensões e deformações, de acordo com os diagramas tensão-deformação.

##### 1.6.2.4.1. MÓDULO DE ELASTICIDADE

No concreto armado, na compressão, podem ser definidos os seguintes módulos de elasticidade, de acordo com a Figura 1.8:

- Módulo tangente:** seu valor é variável em cada ponto e é dado pela inclinação da reta tangente à curva nesse ponto;
- Módulo de deformação tangente na origem ( $E_t$ ), ou módulo de deformabilidade inicial:** é dado pela inclinação da reta tangente à curva na origem;
- Módulo secante (módulo de elasticidade ou módulo de deformação longitudinal à compressão ( $E_s$ )):** seu valor é variável em cada ponto e é obtido pela inclinação da reta que une a origem com esse ponto, ou seja:

$$E_s = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (1.8)$$

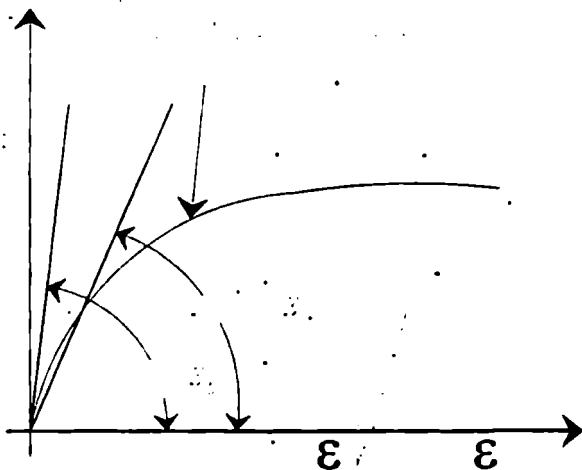


Figura 1.8 Diagrama tensão-deformação do concreto – adaptada de Fusco.<sup>4</sup>

<sup>4</sup> Fusco (1976).

De acordo com Shehata,<sup>5</sup> quando não se especifica o nível de tensão para o módulo secante, infere-se que ele seja o relativo a uma tensão entre 40% e 50% da resistência à compressão. Na origem, os módulos tangente e secante coincidem.

As considerações sobre os módulos de elasticidade ou módulos de deformação do concreto encontram-se no item 8.2.8 da ABNT NBR 6118:2014. O módulo de deformação tangente inicial do concreto ( $E_{ct}$ ), ou simplesmente módulo de elasticidade inicial, deve ser determinado segundo o método de ensaio estabelecido na ABNT NBR 8522:2008, e considerado obtido aos 28 dias de idade. Quando não forem realizados ensaios, ele pode ser estimado por meio das expressões 1.9 e 1.10, sendo  $E_{ct}$  e  $f_{ct}$  dados em MPa:

$$E_{ct} = \alpha_E \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ct}} \text{ para } f_{ct} \text{ de } 20 \text{ MPa a } 50 \text{ MPa} \quad (1.9)$$

$$E_{ct} = 21,5 \cdot 10^3 \cdot \alpha_E \cdot \left( \frac{f_{ct}}{10} + 1,25 \right)^{1/3} \text{ para } f_{ct} \text{ de } 55 \text{ MPa a } 90 \text{ MPa} \quad (1.10)$$

em que:

- $\alpha_E = 1,2$  para basalto e diabásio;
- $\alpha_E = 1,0$  para granito e gnaise;
- $\alpha_E = 0,9$  para calcário;
- $\alpha_E = 0,7$  para arenito.

O módulo de deformação secante também pode ser obtido segundo o método de ensaio estabelecido na ABNT NBR 8522, ou estimado pela expressão 1.11:

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ct} = \left( 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ct}}{80} \right) \cdot E_{ct} \leq E_{ct} \quad (1.11)$$

O Quadro 1.1, reprodução da Tabela 8.1 da ABNT NBR 6118:2014, apresenta valores estimados arredondados que podem ser usados no projeto estrutural.

**Quadro 1.1** Valores estimados de módulo de elasticidade em função da resistência característica à compressão do concreto, considerando o uso de granito como agregado graúdo.

Classe de resistência	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50	C60	C70	C80	C90
$E_{ct}$ (GPa)	25	28	31	33	35	38	40	42	43	45	47
$E_{cs}$ (GPa)	21	24	27	29	32	34	37	40	42	45	47
$\alpha_i$	0,85	0,86	0,88	0,89	0,90	0,91	0,92	0,95	0,98	1,00	1,00

Ainda, a ABNT NBR 6118:2014 permite que, na avaliação do comportamento de um elemento estrutural ou seção transversal, seja adotado módulo de elasticidade único, à tração e à compressão, igual ao módulo de deformação secante  $E_{ci}$ , e que o módulo de elasticidade numa idade menor que 28 dias possa ser avaliado pelas expressões 1.12 e 1.13:

$$E_{ci}(t) = \left[ \frac{f_{ckj}}{f_{ck}} \right]^{0,5} \cdot E_{ci} \text{ para com } f_{ck} \text{ de 20 MPa a 45 MPa} \quad (1.12)$$

$$E_{ci}(t) = \left[ \frac{f_{ckj}}{f_{ck}} \right]^{0,3} \cdot E_{ci} \text{ para os concretos com } f_{ck} \text{ de 50 MPa a 90 MPa} \quad (1.13)$$

em que:

$E_{ci}(t)$  é a estimativa do módulo de elasticidade do concreto em uma idade entre 7 e 28 dias;

$f_{ckj}$  é a resistência à compressão característica do concreto na idade em que se pretende estimar o módulo de elasticidade, em megapascal (MPa).

Para tensões de compressão menores que  $0,5 \cdot f_c$ , pode-se admitir uma relação linear entre tensões e deformações, adotando-se para módulo de elasticidade o valor secante dado pela expressão 1.11.

#### 1.6.2.4.2 DIAGRAMAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO NA COMPRESSÃO SEGUNDO A ABNT NBR 6118:2014

Para análises no estado limite último, pode ser empregado o diagrama tensão-deformação idealizado mostrado na Figura 1.9, para concretos de qualquer classe de resistência, e dado no item 8.2.10.1 da norma ABNT NBR 6118:2014.

A relação entre tensão e deformação é dada pela expressão 1.14, que representa o trecho parabólico da curva inferior do gráfico da Figura 1.9. A expressão que representa a curva superior é obtida substituindo-se na expressão 1.14 o termo  $0,85 \cdot f_{cd}$  por  $f_{cd}$ .

$$\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (1.14)$$

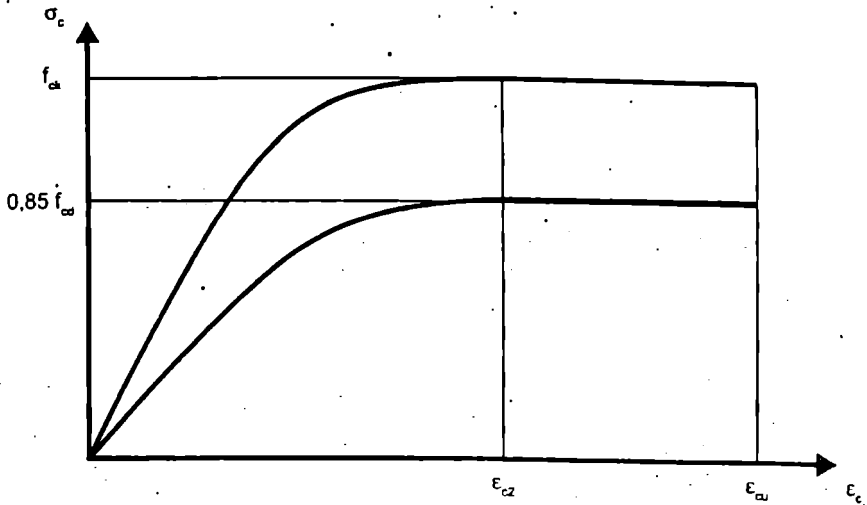


Figura 1.9 Diagrama tensão-deformação idealizado (Figura 8.2 da ABNT NBR 6118:2014).

Os valores a adotar para os parâmetros  $\epsilon_{c2}$  (deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico) e  $\epsilon_{cu}$  (deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura) e o índice  $n$  são:

- para concretos de classes até C50:
  - $\epsilon_{c2} = 2,0\text{‰}$
  - $\epsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$
  - $n = 2$
- para concretos de classes C50 até C90:
  - $\epsilon_{c2} = 2,0\text{‰} + 0,085\text{‰} \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53}$
  - $\epsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 35\text{‰} \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4$
  - $n = 1,4 + 23,4 \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4$

Enfatizando para o caso específico de concretos de classe até C50, o que é o usual em estruturas correntes, as expressões para as curvas inferior ( $\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd}$ ) e superior ( $\sigma_c = f_{ck}$ ) da Figura 1.9 são:

$$\sigma_c = f_{ck} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{2\text{‰}} \right)^2 \right] \quad (1.15)$$

$$\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{2\text{‰}} \right)^2 \right] \quad (1.16)$$

Indicação sobre o valor de  $f_{cd}$  pode ser encontrada no item 12.3.3 da ABNT NBR 6118:2014 e aqui, no capítulo 3.

#### 1.6.2.4.3 DIAGRAMAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO NA TRACÇÃO SEGUNDO A ABNT NBR 6118:2014

Para o concreto não fissurado, submetido a tensões de tração, de acordo com o item 8.2.10.2 da ABNT NBR 6118:2014, pode ser adotado o diagrama tensão-deformação bilinear da Figura 1.10.

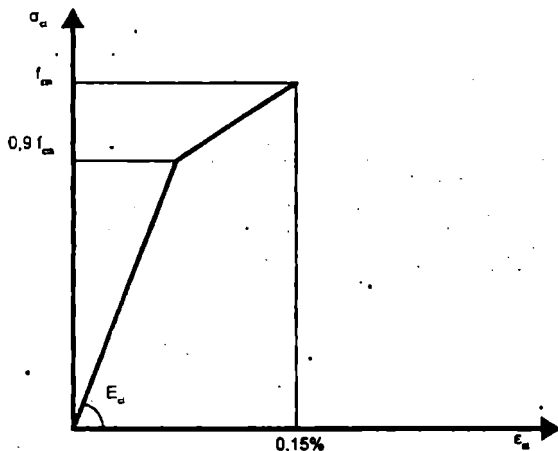


Figura 1.10 Diagrama tensão-deformação na tração (Figura 8.3 da ABNT NBR 6118:2014).

#### 1.6.2.5 Módulo de elasticidade transversal e coeficiente de Poisson

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, item 8.2.9, para tensões de compressão menores que  $0,5 \cdot f_c$  e tensões de tração menores que  $f_{ct}$ , o coeficiente de Poisson  $\nu$  pode ser tomado como igual a 0,2 ( $\nu = 0,2$ ) e o módulo de elasticidade transversal  $G_c$  igual a  $E_{ct}/2,4$  ( $G_c = E_{ct}/2,4$ ).

#### 1.6.2.6 Diagrama tensão-deformação com carga e descarga (ensalo rápido)

Os diagramas tensão-deformação do concreto apresentam, para carregamentos de curta duração e tensões ( $\sigma$ ) abaixo de  $f_c/3$ , um comportamento elástico (trecho reto), e, para tensões ( $\sigma$ ) acima de  $f_c/3$ , apresentam um traçado com acentuada curvatura, indicando um comportamento elastoplástico. Com o descarregamento do corpo de prova, a deformação não volta a zero (Figura 1.11). Às deformações elásticas ( $\epsilon_{ce}$ ) somam-se as plásticas ( $\epsilon_{cp}$ ), resultando na deformação total  $\epsilon_{total} = \epsilon_{ce} + \epsilon_{cp}$ .

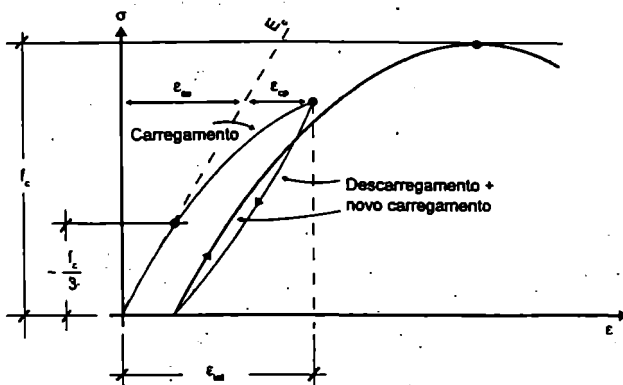


Figura 1.11 Diagrama tensão-deformação com carga e descarga – adaptada de Fusco.<sup>6</sup>

## 1.7 CARACTERÍSTICAS DO AÇO

A norma ABNT NBR 7480:2007 define os tipos, as características e outros itens sobre as barras e fios de aço destinados a armaduras de concreto armado. Essa versão substituiu a de 1996, que por sua vez havia substituído a de 1982 e introduzido diversas modificações, inclusive para ficar adequada ao que é normalmente produzido pelo mercado. Algumas das informações a seguir constam de manuais da ArcelorMittal Aços Longos.

Primeiramente, foi eliminada a categoria CA40 (a sigla CA indica concreto armado, e o número, a categoria, ou seja, a resistência de escoamento mínima, em kN/cm<sup>2</sup>), que não era especificada em projetos nem produzida pelas siderúrgicas, mantendo apenas as categorias CA25 e CA50.

A divisão dos aços em classes (A e B) foi eliminada já na versão de 1996 da ABNT NBR 7480, pois erroneamente entendia-se que o aço classe A apresentava patamar de escoamento, e o classe B não. Na verdade, a separação em classes correspondia ao processo de fabricação: para laminação a quente, o aço era chamado de classe A, e para laminação a frio ou trefilação era denominado de classe B.

Na ABNT NBR 7480:2007, está definido que todo material em barras, casos dos CA25 e CA50, deve ser obrigatoriamente fabricado por laminação a quente, e que todos os fios, característicos do CA60, devem ser fabricados por trefilação ou processo equivalente, como estiramento ou laminação a frio. Os fios têm diâmetro nominal inferior a 10 mm.

Outra questão que deve ser esclarecida é a diferença entre aço e ferro. A principal é o teor de carbono, em que o aço possui um teor inferior a 2,04% e o ferro, entre 2,04%

6 Fusco (1976).

e 6,7%. Como as barras e fios destinados a armaduras para concreto armado (CA25, CA50 e CA60) possuem, normalmente, teor de carbono entre 0,08% e 0,50%, a denominação técnica correta é aço, embora usualmente se utilize o termo ferro.

As características mecânicas mais importantes para a definição de um aço, obtidas em ensaios de tração, são: **resistência característica** (ver a definição de característica no item 1.8.2.1) **de escoamento**, **limite de resistência** e **alongamento na ruptura**.

A **resistência característica de escoamento do aço à tração** ( $f_{yk}$ ) é a máxima tensão que a barra ou o fio devem suportar, pois a partir dela o aço passa a sofrer deformações permanentes, ou seja, até este valor de tensão, ao se interromper o ensaio de tração de uma amostra, esta voltará a seu tamanho inicial, não apresentando nenhum tipo de deformação permanente; este é o caso dos aços que apresentam patamar de escoamento definido (CA25 e CA50). O aço CA60 não tem patamar definido, e o valor de  $f_{yk}$  é o da tensão correspondente a uma deformação específica permanente de 0,002 (0,2% ou 2‰).

**Limite de resistência** ( $f_{tm}$ ) é a força máxima suportada pelo material, e com a qual ele se rompe, ou seja, é o ponto máximo de resistência da barra, sendo seu valor obtido pela leitura direta na máquina de tração. A tensão máxima é determinada pela relação entre a força de ruptura e a área da seção transversal inicial da amostra.

**Alongamento na ruptura:** é o aumento do comprimento do corpo de prova correspondente à ruptura, expresso em porcentagem, ou seja,

$$\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0} \cdot 100 \quad (1.17)$$

em que  $\ell_0$  e  $\ell_1$  são os comprimentos inicial e final, respectivamente, de um trecho (normalmente central) do corpo de prova;  $\ell_1$  deve ser medido depois de retirada a carga.

Para os materiais especificados pela ABNT NBR 7480:2007, o comprimento inicial a utilizar é de dez vezes o diâmetro nominal da amostra. Por exemplo, se o material ensaiado tem diâmetro de 10 mm, o  $\ell_0$  será de 100 mm.

A classificação, os diâmetros e seções transversais nominais de barras e fios e os coeficientes de conformação superficial mínimo  $\eta_b$  das barras não lisas são estabelecidos na norma. Para a massa específica do aço, pode-se tomar o valor de 7.850 kg/m<sup>3</sup>.

Os ensaios de tração para a determinação do diagrama tensão-deformação do aço, dos valores característicos da resistência ao escoamento  $f_{yk}$ , da resistência à tração  $f_{tm}$  e da deformação na ruptura  $\varepsilon_{uk}$  devem ser efetuados segundo a ABNT NBR ISO 6892-2:2013.

Nos aços com patamar de escoamento definido, a deformação específica de cálculo ( $\varepsilon_{yd}$ ), que é a correspondente ao início do patamar, é obtida pela expressão 1.18:

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (1.18)$$

em que:

$E_s$  – módulo de elasticidade do aço, admitido igual a 210.000 MPa ( $2,1 \cdot 10^6$  kgf/cm<sup>2</sup>);

$f_{yd}$  – tensão (resistência) de escoamento de cálculo do aço, igual a  $f_{yk}/1,15$ ;

$f_{yk}$  – resistência característica do aço à tração.

Para o aço CA60, que não apresenta patamar de escoamento, o item 8.3.6 da ABNT NBR 6118:2014 permite, assim como para os aços com patamar, utilizar, para os cálculos nos estados limites de serviço e último, o diagrama simplificado da Figura 1.12. Esse diagrama é válido para intervalos de temperatura entre  $-20$  °C e  $150$  °C, e pode ser aplicado para tração e compressão.

O Quadro 1.2 contém algumas propriedades dos aços, as quais, com as novas prescrições da ABNT NBR 6118:2014 quanto à relação  $\xi = x/d$ , que será explicada em detalhes no capítulo 3 (estudo da flexão em vigas de concreto armado), passam a ser apenas ilustrativas.

Quadro 1.2 Propriedades mecânicas dos aços.

Aço	$f_{yk}$ (MPa)	$f_{yd}$ (MPa)	$\epsilon_{yd}$ (%)	$\xi = x/d$
CA25	250	217	0,104	0,7709
CA50	500	435	0,207	0,6283
CA60	600	522	0,248	0,5900

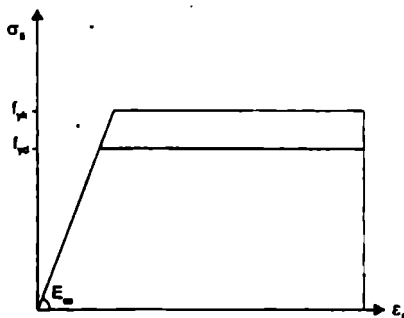


Figura 1.12 Diagrama tensão-deformação para aços de armaduras passivas (Figura 8.4 da ABNT NBR 6118:2014).

## 1.8 DIMENSIONAMENTO (CÁLCULO) DE UMA ESTRUTURA

O cálculo, ou dimensionamento, de uma estrutura deve garantir que ela suporte, de forma segura, estável e sem deformações excessivas, todas as solicitações a que estará submetida durante sua execução e utilização.

O dimensionamento, dessa forma, consiste em impedir a ruína (falha) da estrutura ou de determinadas partes da mesma. Por ruína não se entende apenas o perigo de ruptura, que ameaça a vida dos ocupantes, mas também as situações em que a edificação não apresenta um perfeito estado para utilização, devido a deformações excessivas, fissuras inaceitáveis etc.

De acordo com o item 14.2.1 da ABNT NBR 6118:2014, o objetivo da análise estrutural é determinar os efeitos das ações em uma estrutura, com a finalidade de efetuar verificações de estados limites últimos e de serviço. A análise estrutural permite estabelecer as distribuições de esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos em uma parte ou em toda a estrutura.

Em outras palavras, a finalidade do cálculo estrutural é garantir, com segurança adequada, que a estrutura mantenha certas características que possibilitem a utilização satisfatória da construção, durante sua vida útil, para as finalidades às quais foi concebida.

Entretanto, não se pode pretender que uma estrutura tenha segurança total contra todos os fatores aleatórios que intervêm em uma edificação no processo de concepção, execução e utilização; isso é válido tanto para as ações como para a resistência dos distintos elementos da construção. Basicamente, a insegurança está relacionada às seguintes incertezas:

- Resistência dos materiais utilizados, influenciada por alguns fatores (tempo de duração da aplicação das cargas, fadiga, fabricação etc.), pelas condições de execução da obra e pelos ensaios, que não reproduzem fielmente as situações reais;
- Características geométricas da estrutura (falta de precisão na localização, na seção transversal dos elementos e na posição das armaduras);
- Ações permanentes e variáveis; e
- Valores das solicitações calculados, que podem ser diferentes dos reais em virtude de todas as imprecisões inerentes ao processo de cálculo.

Objetivamente, o cálculo (dimensionamento) de uma estrutura consiste em uma das seguintes operações:

- Comprovar que uma seção previamente conhecida (forma, dimensões e quantidade de armadura) é capaz de resistir às solicitações mais desfavoráveis que poderão atuar; ou

- Dimensionar uma seção ainda não definida completamente (algumas dimensões podem ser impostas antes do cálculo, como a largura de uma viga sob uma parede), a fim de que suporte as solicitações máximas a que poderá estar sujeita.

Os métodos de cálculo das estruturas de concreto armado podem ser classificados, basicamente, em dois grupos: os métodos clássicos, ou das tensões admissíveis, e os métodos de cálculo na ruptura (ou dos estados limites).

### 1.8.1 MÉTODOS CLÁSSICOS

Nestes métodos, são determinadas as solicitações (Momento fletor –  $M$ , Força cortante –  $V$  e Força normal –  $N$ ) correspondentes às cargas máximas de serviço (cargas de utilização); calculam-se as tensões máximas correspondentes a essas solicitações, supondo um comportamento completamente elástico dos materiais; as tensões máximas são, então, limitadas a uma fração da resistência dos materiais (tensões admissíveis), e, dessa forma, a segurança da estrutura é garantida.

Os métodos clássicos são métodos determinísticos, nos quais se consideram fixos, não aleatórios, os distintos valores numéricos que servem de partida para o cálculo (resistência dos materiais, valores das cargas etc.). Algumas restrições podem ser feitas a esses métodos:

- a) Como os valores envolvidos são fixos, não aleatórios, as grandezas são empregadas com seus valores máximos, raramente atingidos durante a vida útil da estrutura, o que geralmente leva a um superdimensionamento.
- b) O cálculo por meio do método clássico conduz frequentemente a um mau aproveitamento dos materiais, pois não considera sua capacidade de adaptação plástica para resistir a maiores solicitações.
- c) O método clássico baseia-se no valor das tensões oriundas das cargas de serviço, supondo que durante a utilização a estrutura permaneça em regime elástico, como ocorre geralmente; entretanto, não fornece informação acerca da capacidade que a estrutura tem de receber mais carga, não sendo possível averiguar, com esse método, sua verdadeira margem de segurança;
- d) Há situações em que as solicitações não são proporcionais às ações, e um pequeno aumento das ações pode provocar um grande aumento das solicitações (ou a situação contrária).

### 1.8.2 MÉTODOS DE CÁLCULO NA RUPTURA (OU DOS ESTADOS LIMITES)

Nestes métodos, a segurança é garantida fazendo com que as solicitações correspondentes às cargas majoradas (solicitações de cálculo) sejam menores que as solicitações últimas, sendo estas as que levariam a estrutura à ruptura (ou a atingir um estado

- limite último) se os materiais tivessem suas resistências reais (resistências características) minoradas por coeficientes de ponderação das resistências (resistências de cálculo).

De maneira geral, a ABNT NBR 6118:2014 estabelece, em seu item 12.5, que na verificação da segurança das estruturas de concreto devem ser atendidas as condições construtivas e as condições analíticas de segurança. Nas condições construtivas de segurança devem-se tomar cuidados especiais em relação aos critérios de detalhamento (seções 18 e 20 da norma), ao controle dos materiais, conforme as normas específicas, especialmente as ABNT NBR 12654:1992: versão corrigida: 2000 (Controle tecnológico de materiais componentes do concreto – procedimento) e ABNT NBR 12655:2006 (Concreto de cimento Portland – Preparo, controle e recebimento – procedimento), e ao controle de execução da obra, conforme a ABNT NBR 14931:2004 (Execução de estruturas de concreto – procedimento) e outras normas específicas.

Quanto às condições analíticas de segurança, a ABNT NBR 6118:2014 (item 12.5.2) indica que “as resistências não podem ser menores que as solicitações e devem ser verificadas em relação a todos os estados limites e todos os carregamentos especificados para o tipo de construção considerado, ou seja, em qualquer caso deve ser respeitada a condição:

$$R_d \geq S_d \quad (1.19)$$

Para a verificação do estado limite último de perda de equilíbrio como corpo rígido,  $R_d$  e  $S_d$  devem assumir os valores de cálculo das ações estabilizantes e desestabilizantes respectivamente”. Na expressão 1.19,  $R_d$  são os valores de cálculo dos esforços resistentes e  $S_d$  são os valores de cálculo dos esforços solicitantes.

O método dos estados limites é um processo simplificado de verificação da segurança, visto que uma análise probabilística completa seria difícil e complicada, até mesmo impossível, e por isso é chamado de semiprobabilístico. Admite-se que a estrutura seja segura quando as solicitações de cálculo forem, no máximo, iguais aos valores que podem ser suportados pela estrutura no estado limite considerado (ver seção 1.8.1.2.6 deste capítulo). Resumidamente, o método consiste em:

- **Adotar os valores característicos para as resistências e para as ações.** Dessa forma, aceita-se que, *a priori*, as resistências efetivas possam ser inferiores aos seus valores característicos e que as ações efetivas possam ser superiores aos seus valores característicos; e
- **Cobrir os demais elementos de incerteza existentes no cálculo estrutural pela transformação dos valores característicos em valores de cálculo:** minoram-se as resistências e majoram-se as ações.

### 1.8.2.1 Valores característicos das resistências

A ABNT NBR 6118:2014, item 12.2, define os valores característicos das resistências que deverão ser transformadas em valores de cálculo da seguinte maneira:

Os valores característicos  $f_k$  das resistências são os que, em um lote de material, têm uma determinada probabilidade de serem ultrapassados, no sentido desfavorável para a segurança. Usualmente é de interesse a resistência característica inferior  $f_{k,m}$ , cujo valor é menor que a resistência média  $f_m$ , embora por vezes haja interesse na resistência característica superior  $f_{k,mp}$ , cujo valor é maior que  $f_m$ . Para os efeitos desta norma, a resistência característica inferior é admitida como sendo o valor que tem apenas 5% de probabilidade de não ser atingido pelos elementos de um dado lote de material.

Esses conceitos estão também apresentados, em detalhes, no item 1.6.2.2 deste capítulo.

### 1.8.2.2 Valores de cálculo das resistências

Os valores de cálculo das resistências, segundo o item 12.3.1 da ABNT NBR 6118:2014, são obtidos a partir das resistências características inferiores  $f_k$ , por meio da expressão 1.20:

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma_m} \quad (1.20)$$

em que  $\gamma_m$  é o coeficiente de ponderação das resistências, definido no item 12.4 da norma e apresentado na seção 1.8.1.2.5 deste capítulo.

### 1.8.2.3 Valores de cálculo das tensões resistentes

Segundo o item 12.3.2 da ABNT NBR 6118:2014:

As tensões resistentes de cálculo  $\sigma_{rd}$  ou  $\tau_{rd}$  são estabelecidas para a determinação das solicitações resistentes de cálculo que não dependam diretamente das resistências medidas convencionalmente em ensaios de corpos de prova padronizados dos materiais empregados. Os valores de  $\sigma_{rd}$  e  $\tau_{rd}$  são estabelecidos, em cada caso particular, a partir das teorias de resistência dos elementos estruturais considerados.

### 1.8.2.4 Valores de cálculo da resistência do concreto

A ABNT NBR 6118:2014, item 12.3.3, amplia o conceito de resistência de cálculo do concreto, a qual deve ser determinada de duas maneiras, em função da idade do concreto:

a) Quando a verificação se faz em data  $j$  igual ou superior a 28 dias de idade:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (1.21)$$

Neste caso, o controle da resistência à compressão do concreto deve ser feito aos 28 dias, de forma a confirmar o valor de  $f_{ck}$  adotado no projeto.

b) Quando a verificação se faz em data  $j$  inferior a 28 dias de idade:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck,j}}{\gamma_c} \cong \beta_1 \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (1.22)$$

em que  $\beta_1$  é a relação  $f_{ck,j}/f_{ck}$ , que pode ser obtida pelo gráfico da Figura 1.13 ou pela expressão 1.23:

$$\beta_1 = \exp [s \cdot [1 - (28/t)^{1/2}]] \quad (1.23)$$

com:

$$s = \begin{cases} 0,38 & \text{para concreto de cimento CPIII e CPIV} \\ 0,25 & \text{para concreto de cimento CPI e CPII} \\ 0,20 & \text{para concreto de cimento CPV-ARI} \end{cases}$$

$t$  - idade efetiva do concreto, em dias.

Esta verificação deve ser feita aos  $t$  dias para as cargas aplicadas até essa data. A verificação para a totalidade das cargas ainda será feita para a data que corresponda a 28 dias. Neste caso, o controle da resistência do concreto à compressão deve ser feito em duas datas: aos  $t$  dias e aos 28 dias, de forma a confirmar os valores de  $f_{cd,j}$  e  $f_{cd}$  adotados no projeto.

Para estudar a data em que o escoramento de uma estrutura de concreto pode ser retirado devem ser usados, no caso de a idade do concreto ser inferior a 28 dias, os valores da resistência expressos em 1.19 e 1.20. Para datas em que o concreto tem idade acima de 28 dias, o valor a se adotar para a resistência é o relativo aos 28 dias, pois o aumento de resistência que ocorre a partir desta data já é considerado no valor de 0,85, que multiplica a resistência à compressão de cálculo do concreto,  $f_{cd}$  (a explicação é dada no capítulo 3).

A variação da resistência à compressão do concreto em relação a sua idade é mostrada no gráfico da Figura 1.13. É importante destacar que para o cálculo e verificação

dos estados limites últimos e de serviço não se pode utilizar, para o concreto, resistência superior ao valor obtido aos 28 dias de idade.

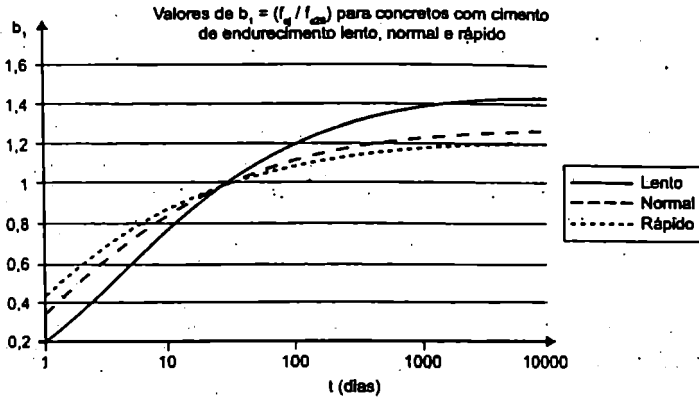


Figura 1.13 Variação da resistência à compressão do concreto em relação a sua idade.

### 1.8.2.5 Coeficientes de ponderação das resistências

As resistências, de acordo com o item 12.4 da ABNT NBR 6118:2014, deverão ser minoradas pelo coeficiente:

$$\gamma_m = \gamma_{m1} \cdot \gamma_{m2} \cdot \gamma_{m3} \tag{1.24}$$

em que:

$\gamma_{m1}$  – parte do coeficiente de ponderação das resistências que considera a variabilidade da resistência dos materiais envolvidos;

$\gamma_{m2}$  – parte do coeficiente de ponderação das resistências que considera a diferença entre a resistência do material no corpo de prova e na estrutura;

$\gamma_{m3}$  – parte do coeficiente de ponderação das resistências que considera os desvios gerados na construção e as aproximações feitas em projeto do ponto de vista das resistências.

Para o estado limite último, os valores base para verificação são apresentados no Quadro 1.3 (Tabela 12.1 da ABNT NBR 6118:2014).

Quadro 1.3 Valores dos coeficientes  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$ .

Combinações	Concreto ( $\gamma_c$ )	Aço ( $\gamma_s$ )
Normais	1,4	1,15
Especiais ou de construção	1,2	1,15
Excepcionais	1,2	1,00

Para as peças em cuja execução sejam previstas condições desfavoráveis (por exemplo, más condições de transporte ou adensamento manual ou concretagem deficiente por concentração de armadura), o coeficiente  $\gamma_c$  deve ser multiplicado por 1,1. Para peças pré-moldadas e pré-fabricadas, os valores encontram-se na ABNT NBR 9062:2006.

Admite-se, nas obras de pequena importância, o emprego de aço CA25 sem a realização do controle de qualidade estabelecido na ABNT NBR 7480:2007, desde que o coeficiente de segurança para o aço seja multiplicado por 1,1.

Para o estado limite de serviço (seções 17, 19 e 23 da ABNT NBR 6118:2014), não é necessário usar coeficientes de minoração, e, portanto,  $\gamma_m = 1,0$ .

Para obras usuais e situações normais em geral, têm-se, para o concreto e aço no estado limite último, os valores respectivos das resistências de cálculo:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1,4} \quad (1.25)$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1,15} \quad (1.26)$$

### 1.8.2.6 Estados limites

Os estados limites considerados no cálculo das estruturas de concreto são os estados limites últimos e os estados limites de serviço.

O estado limite último é aquele relacionado ao colapso ou a qualquer outra forma de ruína estrutural que determine a paralisação, no todo ou em parte, do uso da estrutura. De acordo com o item 10.3 da ABNT NBR 6118:2014, a segurança das estruturas de concreto deve sempre ser verificada em relação aos seguintes estados limites últimos:

- a) Perda do equilíbrio da estrutura, admitida como corpo rígido;
- b) Esgotamento da capacidade resistente da estrutura, em seu todo ou em parte, por causa de solicitações normais e tangenciais; admitem-se, em geral, verificações separadas dessas solicitações (ver capítulos 3 e 6 deste livro);
- c) Esgotamento da capacidade resistente da estrutura, em seu todo ou em parte, considerando os efeitos de segunda ordem;
- d) Provocado por solicitações dinâmicas;
- e) Colapso progressivo;
- f) Esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, considerando exposição ao fogo, conforme a ABNT NBR 15200 2012;
- g) Esgotamento da capacidade resistente da estrutura, considerando ações sísmicas, de acordo com a ABNT NBR 15421:2006;
- h) Outros que, eventualmente, possam ocorrer em casos especiais.

Os estados limites de serviço, conforme o item 10.4 da ABNT NBR 6118:2014, são os relacionados à durabilidade das estruturas, à aparência, ao conforto do usuário e à boa utilização funcional, das mesmas, seja em relação aos usuários, às máquinas ou aos equipamentos utilizados.

A segurança das estruturas de concreto pode exigir a verificação de alguns dos seguintes estados limites de serviço definidos no item 3.2 da ABNT NBR 6118:2014, ou de outros especiais não definidos na norma; não estão relacionados os referentes exclusivamente às estruturas de concreto protendido:

- a) **Formação de fissuras (ELS-F):** estado em que se inicia a formação de fissuras (ver item 13.4.2 da norma e seção 4.7.1 deste livro);
- b) **Abertura das fissuras (ELS-W):** estado em que as fissuras se apresentam com aberturas iguais aos valores máximos especificados no item 13.4.2 da norma e na seção 4.7.2 deste livro;
- c) **Deformação excessiva (ELS-DEF):** estado em que as deformações atingem os limites estabelecidos para utilização normal da estrutura, também definidos no item 13.3 da norma e na seção 4.8 deste livro; e
- d) **Vibrações excessivas (ELS-VE):** estado em que as vibrações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal da construção (item 23.3 da norma).

Os estados limites de serviço, de acordo com o item 4.1.2.2 da ABNT NBR 8681:2003, decorrem de ações que podem ser combinadas de três maneiras, de acordo com o tempo de permanência na estrutura:

- a) **Combinações quase permanentes:** combinações de ações que podem atuar sobre a estrutura durante mais da metade do seu período de vida;
- b) **Combinações frequentes:** combinações de ações que se repetem, durante o período de vida da estrutura, em torno de  $10^5$  vezes em 50 anos ou que tenham duração total igual a uma parte não desprezível desse período da ordem de 5%; e
- c) **Combinações raras:** combinações de ações que podem atuar no máximo algumas horas durante o período de vida da estrutura.

### 1.8.3 Ações

Denomina-se ação qualquer influência, ou conjunto de influências, capaz de produzir estados de tensão ou de deformação em uma estrutura.

As ações são tratadas pela ABNT NBR 6118:2014 em seu capítulo 11, destacando no item 11.2.1: Na análise estrutural deve ser considerada a influência de todas as ações que possam produzir efeitos significativos para a segurança da estrutura em exame, levando-se em conta os possíveis estados limites últimos e os de serviço.

As ações a considerar classificam-se, de acordo com a ABNT NBR 8681:2003, em ações permanentes, variáveis e excepcionais. Para cada tipo de construção, as ações consideradas devem respeitar suas peculiaridades e as normas a elas aplicáveis.

### 1.8.3.1 Ações permanentes

Ações permanentes (ABNT NBR 6118:2014, item 11.3) são as que ocorrem com valores praticamente constantes durante toda a vida da construção. Também são consideradas permanentes as ações que crescem no tempo, tendendo a um valor limite constante. As ações permanentes devem ser consideradas com seus valores representativos mais desfavoráveis para a segurança e são divididas em diretas e indiretas.

- a) As ações permanentes diretas são constituídas pelo peso próprio da estrutura e pelos pesos dos elementos construtivos fixos e das instalações permanentes. Nas construções atuais, admite-se que o peso próprio da estrutura seja avaliado com a massa específica de  $2400 \text{ kg/m}^3$  para o concreto simples e de  $2500 \text{ kg/m}^3$  para o concreto armado ou protendido; esses valores, assim como as massas específicas dos materiais de construção usuais, são indicados na ABNT NBR 6120:1980. Os pesos das instalações permanentes são considerados com os valores nominais indicados pelos respectivos fornecedores. Além do peso próprio, é preciso, sempre que necessário, considerar permanentes os empuxos de terra e outros materiais granulados, quando forem admitidos não removíveis.
- b) As ações permanentes indiretas são constituídas pelas deformações impostas por retração e fluência do concreto, deslocamentos de apoio, imperfeições geométricas (globais e locais) e protensão. A maneira de considerar cada uma delas está nos itens 11.3.3.1 a 11.3.3.5 da ABNT NBR 6118:2014.

### 1.8.3.2 Ações variáveis

As ações variáveis são classificadas como diretas e indiretas.

#### a) Ações variáveis diretas

As ações variáveis diretas (item 11.4.1 da ABNT NBR 6118:2014) são constituídas pelas cargas acidentais previstas para o uso da construção, pela ação do vento e da água, devendo-se respeitar as prescrições feitas por normas brasileiras específicas.

As cargas acidentais previstas para o uso da construção correspondem, normalmente, a:

- cargas verticais de uso da construção (pessoas, mobiliário, veículos, materiais diversos etc.);
- cargas móveis, considerando o impacto vertical;
- impacto lateral;
- força longitudinal de frenagem ou aceleração; e

- força centrífuga.

Essas cargas devem ser dispostas nas posições mais desfavoráveis para o elemento estudado, ressalvadas as simplificações permitidas por normas brasileiras específicas. É obrigatória a consideração da ação do vento, e os esforços correspondentes à ação do vento devem ser determinados de acordo com o prescrito pela ABNT NBR 6123:1988, permitindo-se o emprego de regras simplificadas previstas em normas específicas.

Nas estruturas em que houver possibilidade de ficar água retida, deve ser considerada a presença de uma lâmina de água correspondente ao nível de drenagem efetivamente garantido pela construção. Em relação às ações variáveis que podem ocorrer durante a construção, no item 11.4.1.4 da ABNT NBR 6118:2014 está especificado que:

As estruturas em que todas as fases construtivas não tenham sua segurança garantida pela verificação da obra pronta devem ter, incluídas no projeto, as verificações das fases construtivas mais significativas e sua influência na fase final. A verificação de cada uma dessas fases deve ser feita considerando a parte da estrutura já executada e as estruturas provisórias auxiliares com os respectivos pesos próprios. Além disso, devem ser consideradas as cargas acidentais de execução.

#### b) Ações variáveis indiretas

De acordo com o item 11.4.2 da norma, as ações variáveis indiretas são as causadas por variações uniformes e não uniformes de temperatura e por ações dinâmicas. A variação da temperatura da estrutura é considerada uniforme quando é causada globalmente pela variação da temperatura da atmosfera e pela insolação direta. Ela depende do local de implantação da construção e das dimensões dos elementos estruturais que a compõem. De maneira genérica, podem ser adotados os seguintes valores:

- Para elementos estruturais cuja menor dimensão não seja superior a 50 cm, deve ser considerada uma oscilação de temperatura em torno da média de 10 °C a 15 °C;
- Para elementos estruturais maciços ou ocos com os espaços vazios inteiramente fechados, cuja menor dimensão seja superior a 70 cm, admite-se que essa oscilação seja reduzida, respectivamente, para 5 °C e 10 °C; e
- Para elementos estruturais cuja menor dimensão esteja entre 50 cm e 70 cm, admite-se interpolação linear entre os valores indicados.

A escolha de um valor entre os limites superior e inferior de cada caso pode ser feita considerando 50% da diferença entre as temperaturas médias de verão e inverno, no local da obra. Em edifícios de vários andares, devem ser respeitadas as exigências construtivas prescritas na ABNT NBR 6118:2014 para que sejam minimizados os efeitos das variações de temperatura sobre a estrutura da construção. O coeficiente de

dilatação térmica do concreto (item 8.2.3 da norma), para efeito de análise estrutural, pode ser admitido como sendo igual a  $10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

No caso de distribuições de temperatura significativamente não uniformes, os efeitos dessa distribuição devem ser considerados. Na falta de dados precisos, pode ser admitida uma variação linear entre os valores de temperatura adotados, desde que a variação de temperatura entre uma face e outra da estrutura não seja inferior a  $5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Em relação às ações dinâmicas (item 11.4.2.3 da norma), quando a estrutura estiver sujeita a choques ou vibrações por causa de suas condições de uso, os respectivos efeitos devem ser considerados na determinação das solicitações. Havendo possibilidade de fadiga, ela deve ser considerada no dimensionamento das peças, de acordo com as prescrições da seção 23 da ABNT NBR 6118:2014, que não serão aqui descritas em razão de a fadiga ser de pouca ocorrência em estruturas de edifícios.

### 1.8.3.3 Ações excepcionais

Quanto às ações excepcionais, a ABNT NBR 6118:2014, no item 11.5, prescreve: “No projeto de estruturas sujeitas a situações excepcionais de carregamento, cujos efeitos não possam ser controlados por outros meios, devem ser consideradas ações excepcionais com os valores definidos, em cada caso particular, por Normas Brasileiras específicas”.

Resumindo, as ações podem ser classificadas; para o caso de construções usuais e segundo a ABNT NBR 6118:2014, como:

- permanentes: peso próprio, retração, protensão, fluência e recalques; e
- variáveis: acidental vertical, vento e temperatura.

### 1.8.3.4 Valores representativos das ações

As ações são quantificadas por seus valores representativos, que podem ser valores característicos, convencionais excepcionais e reduzidos, conforme foram definidos no item 11.6 da ABNT NBR 6118:2014.

#### a) Valores característicos

Os valores característicos das ações ( $F_k$ ) são estabelecidos em função da variabilidade de suas intensidades. Para as ações permanentes, esses valores estão definidos em normas específicas, como a ABNT NBR 6120:1980.

Os valores característicos das ações variáveis ( $F_{vk}$ ) correspondem aos que têm probabilidade de 25% a 35% de serem ultrapassados no sentido desfavorável durante um período de 50 anos (conduz a um período médio de retorno de 200 a 140 anos, respectivamente). Também estão definidos em normas específicas, como a ABNT NBR 6120:1980.

#### b) Valores convencionais excepcionais

Os valores convencionais excepcionais são arbitrados para as ações excepcionais, e não podem ser definidos em norma, pois dependem de cada caso particular.

### c) Valores reduzidos

Os valores reduzidos são definidos em função da combinação de ações para as verificações de estados limites últimos e de serviço.

- Para as verificações de estados limites últimos, quando a ação considerada é combinada com a ação principal, os valores reduzidos são determinados admitindo ser muito baixa a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores característicos de duas ou mais ações variáveis de naturezas diferentes (ver próxima seção).
- Para as verificações de estados limites de serviço, os valores reduzidos são determinados a partir dos valores característicos, por expressões que estimam valores frequentes e quase permanentes de uma ação que acompanha a ação principal (ver próxima seção).

#### 1.8.3.5 Valores de cálculo

Os valores de cálculo  $F_d$  das ações são obtidos, para as várias combinações, a partir dos valores representativos, multiplicando-os pelos respectivos coeficientes de ponderação  $\gamma_p$  definidos também na próxima seção.

#### 1.8.4 COEFICIENTES DE PONDERAÇÃO DAS AÇÕES

De acordo com o item 11.7 da ABNT NBR 6118:2014, as ações devem ser majoradas pelo coeficiente de ponderação  $\gamma_f$  obtido pelo produto de três outros:

$$\gamma_f = \gamma_n \cdot \gamma_D \cdot \gamma_D \quad (1.27)$$

em que:

$\gamma_n$  – considera a variabilidade das ações;

$\gamma_D$  – considera a simultaneidade de atuação das ações ( $\gamma_D = \psi_0, \psi_1$  ou  $\psi_2$ , Quadro 1.5); e

$\gamma_D$  – considera os possíveis desvios gerados nas construções e as aproximações feitas em projeto do ponto de vista das solicitações.

O desdobramento do coeficiente de ponderação (ou de segurança) em coeficientes parciais permite que os valores gerais especificados para  $\gamma_f$  possam ser discriminados em função das peculiaridades dos diferentes tipos de estruturas e de materiais de construção considerados.

Como as ações consideradas no projeto podem ser de várias naturezas, o índice do coeficiente  $\gamma_f$  pode ser alterado para identificar a ação considerada, com os símbolos  $\gamma_q, \gamma_p, \gamma_s$  e  $\gamma_r$ , para as ações permanentes, variáveis diretas (acidentais), protensão e efeitos de deformações impostas (ações indiretas), respectivamente.

Os valores do coeficiente  $\gamma_r$ , relativos aos estados limites últimos (ELU) são apresentados no item 11.7.1, e os relativos aos estados limites de serviço (ELS) são dados no item 11.7.2 da ABNT NBR 6118:2014.

#### 1.8.4.1 Coeficientes de ponderação para os estados limites últimos

Os valores base para verificação nos estados limites últimos são os apresentados nos quadros 1.4 e 1.5 (tabelas 11.1 e 11.2 da ABNT NBR 6118:2014), para os coeficientes  $\gamma_{D1}$ ,  $\gamma_D$  e  $\gamma_{D2}$ , respectivamente.

Quadro 1.4 Valores do coeficiente  $\gamma_r = \gamma_{D1} \cdot \gamma_D$

Combinações de ações	Ações							
	Permanentes (g)		Variáveis (q)		Protensão (p)		Recalques de apoio e retração	
	Desfavorável	Favorável	Geral	Temperatura	Desfavorável	Favorável	Desfavorável	Favorável
Normais	1,4	1,0	1,4	1,2	1,2	0,9	1,2	0
Especiais ou de construção	1,3	1,0	1,2	1,0	1,2	0,9	1,2	0
Excepcionais	1,2	1,0	1,0	0	1,2	0,9	0	0

\* Para as cargas permanentes de pequena variabilidade, como o peso próprio das estruturas, especialmente as pré-moldadas, esse coeficiente pode ser reduzido para 1,3.

Quadro 1.5 Valores do coeficiente  $\gamma_D$

Ações	$\gamma_D$		
	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
<b>Cargas acidentais de edifícios</b>			
• Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas, como é o caso de edifícios residenciais	0,5	0,4	0,3
• Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecerem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevadas concentração de pessoas, como é o caso de edifícios comerciais, de escritórios, estações e edifícios públicos	0,7	0,6	0,4
• Biblioteca, arquivos, oficinas e garagens	0,8	0,7	0,6
<b>Vento</b>			
• Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0,6	0,3	0

Quadro 1.5 Continuação...

Ações	$\gamma_a$		
	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
Temperatura			
• Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0,6	0,5	0,3

em que:

$\psi_0$  – fator de redução de combinação para o estado limite último;

$\psi_1$  – fator de redução de combinação frequente para o estado limite de serviço; e

$\psi_2$  – fator de redução de combinação quase permanente para o estado limite de serviço.

Os valores dos quadros 1.4 e 1.5 podem ser modificados em casos especiais, não contemplados aqui, de acordo com a ABNT NBR 8681:2003.

O valor do coeficiente de ponderação, de cargas permanentes de mesma origem, em um dado carregamento, deve ser o mesmo ao longo de toda estrutura. A única exceção é o caso da verificação da estabilidade como corpo rígido.

Segundo o item 13.2.3 da norma, a seção transversal de pilares e pilares-paredes maciços, qualquer que seja a sua forma, não pode apresentar dimensão menor que 19 cm. Em casos especiais, permitem-se paredes estruturais com espessura entre 14 cm e 20 cm e pilares com largura inferior a 20 cm, desde que o coeficiente  $\gamma_r$  seja majorado pelo coeficiente de ajustamento  $\gamma_a$ , de acordo com os valores do Quadro 1.6 (item 13.2.3 da ABNT NBR 6118:2014); esta correção se deve ao aumento da probabilidade de ocorrência de desvios relativos significativos e falhas na construção. Em qualquer caso, não se permite pilar com seção transversal de área inferior a 360 cm<sup>2</sup>.

Para lajes em balanço com espessura  $h$  inferior a 19 cm, os esforços solicitantes de cálculo também devem ser multiplicados pelo coeficiente de ajustamento  $\gamma_a$  dados no item 13.2.4.1 da norma e no Quadro 1.7.

Quadro 1.6 Valores do coeficiente adicional  $\gamma_a$  para pilares e pilares-parede.

b (cm)	≥ 19	18	17	16	15	14
$\gamma_a$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25

Esses valores também podem ser obtidos pela expressão 1.28, em que  $b$  é a menor dimensão da seção transversal do pilar, expressa em centímetros (cm):

$$\gamma_a = 1,95 - 0,05 \cdot b \tag{1.28}$$

**Quadro 1.7** Valores do coeficiente adicional  $\gamma_n$  para lajes em balanço.

h (cm)	≥ 19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
$\gamma_n$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45

Esses valores também podem ser obtidos pela expressão 1.29, em que h é a altura da laje, expressa em centímetros (cm):

$$\gamma_n = 1,95 - 0,05 \cdot h \quad (1.29)$$

#### 1.8.4.2 Coeficientes de ponderação para os estados limites de serviço

Em geral, o coeficiente de ponderação das ações, para os estados limites de serviço, é tomado igual a  $\gamma_R$ , ( $\gamma_r = \gamma_R$ ), sendo que  $\gamma_R$  tem valor variável conforme a verificação desejada, conforme a seguir, sendo os valores dos fatores de redução  $\psi_1$  e  $\psi_2$  referentes às combinações de serviço dadas no Quadro 1.5, em que:

$\gamma_R = 1$  para combinações raras;

$\gamma_R = \psi_1$  para combinações frequentes;

$\gamma_R = \psi_2$  para combinações quase permanentes.

O objetivo da análise estrutural (seção 14 da ABNT NBR 6118:2014) é determinar os efeitos das ações na estrutura, de modo a verificar os estados limites últimos e de serviço. Essa análise permite estabelecer as distribuições de esforços internos, as tensões, as deformações e os deslocamentos, em parte ou em toda a estrutura. Para isso, as solicitações de cálculo devem ser determinadas a partir de combinações das ações consideradas, de acordo com a análise estrutural.

#### 1.8.5 COMBINAÇÕES DAS AÇÕES

Um carregamento é definido pela combinação das ações que têm probabilidades não desprezíveis de atuarem simultaneamente sobre a estrutura durante um período preestabelecido.

A combinação das ações deve ser feita de forma que possam ser determinados os efeitos mais desfavoráveis para a estrutura; a verificação da segurança em relação aos estados limites últimos e aos estados limites de serviço deve ser realizada em função de combinações últimas e de serviço, respectivamente. Em todas as combinações, as ações permanentes devem ser tomadas em sua totalidade; das ações variáveis devem ser tomadas apenas as parcelas que produzem efeitos desfavoráveis para a segurança.

As ações incluídas em cada uma das combinações devem ser consideradas com seus valores representativos, multiplicados pelos respectivos coeficientes de ponderação. As combinações das ações necessárias às verificações nos estados limites último e de

serviço estão definidas no item 11.8 da ABNT NBR 6118:2014 para diversas possibilidades, e critérios gerais são dados no item 4.3.3 da ABNT NBR 8681:2003.

### 1.8.5.1 Combinações últimas

As combinações últimas são classificadas como **normais** (relacionam-se aqui apenas as referentes ao esgotamento da capacidade resistente para elementos de concreto armado), **especiais** ou **de construção e excepcionais**. As ações permanentes devem figurar em todas as combinações de ações.

#### a) Combinações últimas normais (concreto armado)

Em cada combinação última normal, uma das ações variáveis é considerada como a principal, admitindo-se que ela atue com seu valor característico  $F_k$ , e as demais são entendidas como secundárias, atuando com seus valores reduzidos de combinação  $\psi_0 \cdot F_k$ , conforme a ABNT NBR 8681:2003. As combinações normais são dadas pela expressão 1.30:

$$F_d = \gamma_g \cdot F_{gk} + \gamma_{eg} \cdot F_{egk} + \gamma_q \cdot (F_{q1k} + \sum \psi_{0j} \cdot F_{qjk}) + \gamma_{ec} \cdot \psi_{0c} \cdot F_{eqk} \quad (1.30)$$

em que:

$F_d$  – valor de cálculo das ações para combinação última;

$F_{gk}$  – representa as ações permanentes diretas;

$F_{egk}$  – representa as ações indiretas permanentes como a retração  $F_{cgk}$  e variáveis como a temperatura  $F_{eqk}$ ;

$F_{q1k}$  – representa as ações variáveis diretas das quais  $F_{q1k}$  é escolhida principal;

$\gamma_g, \gamma_{eg}, \gamma_q, \gamma_c$  – expressos no Quadro 1.4;

$\psi_{0j}, \psi_{0c}$  – expressos no Quadro 1.5.

De maneira geral, deverão ser consideradas inclusive combinações em que o efeito favorável das cargas permanentes seja reduzido pela consideração de  $\gamma_g = 1,0$ . No caso de estruturas usuais de edifícios, essas combinações que consideram  $\gamma_g$  reduzido (1,0) não precisam ser consideradas.

Ainda, no caso de combinações normais para perda do equilíbrio como corpo rígido, devem ser empregadas as seguintes expressões:

$$S(F_{nd}) \geq S(F_{nd}) \quad (1.31)$$

$$F_{nd} = \gamma_{gr} \cdot G_{nk} + R_d \quad (1.32)$$

$$F_{nd} = \gamma_{gr} \cdot G_{nk} + \gamma_q \cdot Q_{nk} - \gamma_{qr} \cdot Q_{n,min} \quad (1.33)$$

$$G_{nk} = Q_{nk} + \sum_{j=2}^m \psi_{0j} \cdot Q_{jk} \quad (1.34)$$

$$Q_{nk} = Q_{ik} + \sum \psi_{0j} \cdot Q_{jk} \quad (1.35)$$

em que:

$F_{nd}$  – representa as ações estabilizantes;

$F_{nd}$  – representa as ações não estabilizantes;

$G_{ik}$  – é o valor característico da ação permanente estabilizante;

$R_d$  – é o esforço resistente considerado estabilizante, quando houver;

$G_{ak}$  – é o valor característico da ação permanente instabilizante;

$Q_{nk}$  – é o valor característico das ações variáveis instabilizantes;

$Q_{ik}$  – é o valor característico da ação variável instabilizante considerada principal;

$\psi_{0j}$  e  $Q_{jk}$  – são as demais ações variáveis instabilizantes, consideradas com seu valor reduzido;

$Q_{a,min}$  – é o valor característico mínimo da ação variável estabilizante que acompanha obrigatoriamente uma ação variável instabilizante.

### b) Combinações últimas especiais ou de construção

No caso das ações especiais ou de construção, vale a mesma combinação das normais (expressão 1.30), tendo, os termos, os mesmos significados. A diferença é que  $\psi_0$  pode ser substituído por  $\psi_2$  quando a atuação da ação principal  $F_{qik}$  tiver duração muito curta.

Nessas combinações devem sempre estar presentes as ações permanentes, a ação variável especial, quando existir, com seus valores característicos, e as demais ações variáveis, com probabilidade não desprezível de ocorrência simultânea, com seus valores reduzidos de combinação.

### c) Combinações últimas excepcionais

No caso das ações excepcionais, também  $\psi_0$  pode ser substituído por  $\psi_2$  quando a atuação da ação principal  $F_{q1exc}$  tiver duração muito curta.

Da mesma maneira devem também sempre figurar as ações permanentes, a ação variável excepcional, quando existir, com seus valores representativos, e as demais ações variáveis, com probabilidade não desprezível de ocorrência simultânea, com seus valores reduzidos de combinação. Nesse caso enquadram-se, entre outros, sismo, incêndio e colapso progressivo. A combinação é expressa por:

$$F_d = \gamma_g \cdot F_{gk} + \gamma_{eq} \cdot F_{eqk} + F_{q1exc} + \gamma_q \cdot \sum \psi_{0j} \cdot F_{qjk} + \gamma_{eq} \cdot \psi_{0a} \cdot F_{exk} \quad (1.36)$$

em que  $F_{q1exc}$  é a ação excepcional, e os demais termos são os mesmos definidos no item a).

#### 1.8.5.2 Combinações de serviço

As combinações de serviço são classificadas de acordo com seu tempo de permanência na estrutura em quase permanentes, frequentes e raras.

**a) Combinações quase permanentes de serviço**

Nas combinações quase permanentes admite-se que as ações atuem durante grande parte do período de vida da estrutura, e sua consideração pode ser necessária na verificação do estado limite de deformação excessiva. Nessas combinações, todas as ações variáveis são consideradas com seus valores quase permanentes  $\psi_2 \cdot F_{qk}$ , sendo:

$$F_{d,ser} = \sum F_{gk} + \sum \psi_{2j} \cdot F_{qj,k} \tag{1.37}$$

em que:

$F_{d,ser}$  é o valor de cálculo das ações para combinações de serviço;

$\psi_2$  é o fator de redução de combinação quase permanente para o estado limite de serviço.

**b) Combinações frequentes de serviço**

Nas combinações frequentes, as ações se repetem muitas vezes durante o período de vida da estrutura, e sua consideração pode ser necessária na verificação dos estados limites de formação e abertura de fissuras e de vibrações excessivas. Podem também ser consideradas para verificações de estados limites de deformações excessivas decorrentes de vento ou temperatura que possam comprometer as vedações. Nessas combinações, a ação variável principal  $F_{q1}$  é tomada com seu valor frequente  $\psi_1 \cdot F_{q1,k}$ , e todas as demais ações variáveis são tomadas com seus valores quase permanentes  $\psi_2 \cdot F_{qk}$ , sendo:

$$F_{d,ser} = \sum F_{gk} + \psi_1 \cdot F_{q1,k} + \sum \psi_{2j} \cdot F_{qj,k} \tag{1.38}$$

em que:

$F_{q1,k}$  é o valor característico das ações variáveis principais diretas;

$\psi_1$  é o fator de redução de combinação frequente para o estado limite de serviço.

**c) Combinações raras de serviço**

Nas combinações raras, as ações ocorrem algumas vezes durante o período de vida da estrutura, e sua consideração pode ser necessária na verificação do estado limite de formação de fissuras. Nessas combinações, a ação variável principal  $F_{q1}$  é tomada com seu valor característico  $F_{q1,k}$ , e todas as demais ações são tomadas com seus valores frequentes  $\psi_1 \cdot F_{qk}$ , sendo:

$$F_{d,ser} = \sum F_{gk} + F_{q1,k} + \sum \psi_{1j} \cdot F_{qj,k} \tag{1.39}$$

**1.8.6 SOLICITAÇÕES**

Denomina-se solicitação (ou esforço solicitante) qualquer esforço (momento fletor, força normal, força cortante) ou conjunto de esforços decorrentes das ações e aplicados a uma ou mais seções de um elemento da estrutura.

Na ABNT NBR 6118:2014, as solicitações de cálculo são obtidas para a combinação de ações considerada, de acordo com a análise estrutural, e para cada estado limite a ser considerado, ou seja, as ações é que são majoradas, sendo então determinadas as solicitações.

## 1.9 QUALIDADE DAS ESTRUTURAS

Um dos aspectos a se destacar na ABNT NBR 6118:2014 é a preocupação existente com a questão da qualidade e durabilidade das estruturas, apresentadas na seção 5, Requisitos gerais de qualidade da estrutura e avaliação da conformidade do projeto, e na 6, Diretrizes para a durabilidade das estruturas de concreto. A norma estabelece, no item 5.1.1, que as estruturas de concreto devem atender aos seguintes requisitos mínimos de qualidade durante a construção e utilização, classificados em três grupos distintos definidos no item 5.1.2:

- **Grupo 1:** requisitos relativos à capacidade resistente da estrutura ou de seus elementos componentes;
- **Grupo 2:** requisitos relativos ao desempenho em serviço, que consiste na capacidade de a estrutura se manter em condições plenas de utilização, não devendo apresentar danos que comprometam, em parte ou totalmente, o uso para o qual foi projetada; e
- **Grupo 3:** requisitos relativos a sua durabilidade, que consiste na capacidade de a estrutura resistir às influências ambientais previstas e definidas em conjunto pelo autor do projeto estrutural e o contratante.

Simplificadamente, as exigências do grupo 1 correspondem à segurança contra a ruptura, as exigências do grupo 2 referem-se a danos como fissuração excessiva, deformações inconvenientes e vibrações indesejáveis e as exigências do grupo 3 têm como referência a conservação da estrutura, sem necessidade de reparos de alto custo.

A solução estrutural adotada deve atender aos requisitos de qualidade estabelecidos nas normas técnicas referentes aos três grupos. Deve ainda considerar as condições arquitetônicas, funcionais, construtivas (estabelecidas principalmente na ABNT NBR 14931:2004), estruturais e de integração com os demais projetos (elétricos, hidráulicos e outros).

Quanto ao projeto em si, ele deve proporcionar as informações necessárias para a execução da estrutura, atendendo a todos os requisitos estabelecidos na ABNT NBR 6118:2014 e em outras complementares e específicas, conforme o caso.

## 1.10 DURABILIDADE DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO

Em relação à durabilidade, a ABNT NBR 6118:2014, no item 6.1, exige que as estruturas de concreto sejam projetadas e construídas de modo que, sob as influências ambientais previstas e quando utilizadas conforme estabelecido em projeto, conservem sua segurança, estabilidade e comportamento adequado em serviço durante o período correspondente à sua vida útil de projeto.

Vida útil de projeto, de acordo com o item 6.2 da norma, é o período de tempo durante o qual se mantêm as características da estrutura de concreto, sem intervenções significativas, desde que sejam atendidos os requisitos de uso e manutenção prescritos pelo projetista e construtor, bem como de execução dos reparos necessários decorrentes de eventuais danos acidentais.

A durabilidade das estruturas de concreto requer, ainda, cooperação e esforços coordenados do proprietário, do usuário e dos responsáveis pelo projeto arquitetônico, pelo projeto estrutural; pela tecnologia do concreto e pela construção.

Uma das principais responsáveis pela perda de qualidade e durabilidade das estruturas é a agressividade do meio ambiente, que segundo o item 6.4 da ABNT NBR 6118:2014 está relacionada às ações físicas e químicas que atuam sobre as estruturas de concreto, independentemente das ações mecânicas, das variações volumétricas de origem térmica, da retração hidráulica e outras previstas no dimensionamento.

Nos projetos das estruturas correntes, a agressividade ambiental pode ser classificada de acordo com o apresentado no Quadro 1.8 (Tabela 6.1 da ABNT NBR 6118:2014), podendo ser avaliada, simplificada, segundo as condições de exposição da estrutura ou de suas partes.

Quadro 1.8 Classes de agressividade ambiental (CAA).

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural	Insignificante
		Submersa	
II	Moderada	Urbana <sup>1),2)</sup>	Pequeno
III	Forte	Marinha <sup>1)</sup>	Grande
		Industrial <sup>1),2)</sup>	
IV	Muito forte	Industrial <sup>1),2)</sup>	Elevado
		Respingos de maré	

Quadro 1.8 *Continuação...*

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
1)	Pode-se admitir um microclima com uma classe de agressividade mais branda (um nível acima) para ambientes internos secos: salas, dormitórios, banheiros, cozinhas, áreas de serviço de apartamentos residenciais e conjuntos comerciais ou ambientes com concreto revestido com argamassa e pintura.		
2)	Pode-se admitir uma classe de agressividade mais branda (um nível acima) em obras em regiões de clima seco, com umidade relativa do ar menor ou igual a 65%, partes da estrutura protegidas de chuva em ambientes predominantemente secos ou regiões onde chove raramente.		
3)	Ambientes quimicamente agressivos, tanques industriais, galvanoplastia, branqueamento em indústrias de celulose e papel, armazéns de fertilizantes, indústrias químicas.		

A durabilidade das estruturas é altamente dependente das características do concreto e da espessura e qualidade do concreto do cobrimento da armadura. Segundo o item 7.4.2 da ABNT NBR 6118:2014, ensaios comprobatórios de desempenho da durabilidade da estrutura frente ao tipo e nível de agressividade previsto em projeto devem estabelecer os parâmetros mínimos a serem atendidos. Na falta destes e por causa da forte correspondência entre a relação água/cimento, a resistência à compressão do concreto e sua durabilidade, é permitido adotar os requisitos mínimos do Quadro 1.9 (Tabela 7.1 da ABNT NBR 6118:2014), destacando que o concreto empregado na execução das estruturas deve cumprir os requisitos estabelecidos na ABNT NBR 12655:2006, e as classes de concreto são dadas na ABNT NBR 8953:2009 (Concreto para fins estruturais – classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência).

Quadro 1.9 Correspondência entre classe de agressividade e qualidade do concreto.

Concreto	Tipo	Classe de agressividade			
		I	II	III	IV
Relação água/cimento em massa	Concreto armado	$\leq 0,65$	$\leq 0,60$	$0,55 \leq$	$\leq 0,45$
	Concreto protendido	$\leq 0,60$	$\leq 0,55$	$\leq 0,50$	$\leq 0,45$
Classe de concreto	Concreto armado	$\geq C20$	$\geq C25$	$\geq C30$	$\geq C40$
	Concreto protendido	$\geq C25$	$\geq C30$	$\geq C35$	$\geq C40$

Além das especificações da classe de concreto e do máximo fator água/cimento, as verificações de aberturas máximas de fissuras e os cobrimentos mínimos das armaduras

(capítulo 4), todos em função da classe de agressividade ambiental, fazem parte das condições de projeto que garantem a durabilidade da estrutura.

### 1.11 CUIDADOS A TOMAR EM UM PROJETO PARA GARANTIR A DURABILIDADE

Ao se iniciar um projeto de uma estrutura em concreto armado, para garantir a sua durabilidade é preciso, no mínimo, tomar os seguintes cuidados referentes ao cálculo e detalhamento:

- 1) Identificar a região em que a estrutura será construída e em que condições será utilizada, definindo a classe de agressividade ambiental (CAA) e a classificando de acordo com o Quadro 1.8;
- 2) Definir, a partir da CAA, o valor mínimo da resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ) e o valor máximo do fator água/cimento (A/C), fornecido no Quadro 1.8;
- 3) Ainda, por meio da CAA, determinar o cobrimento mínimo da armadura que deve ser empregado (será visto no capítulo 4);
- 4) Identificar o uso do edifício cuja estrutura está sendo calculada; assim, fica definido o valor de  $\psi_1$  (Quadro 1.5) para ser empregado na verificação de abertura de fissuras;
- 5) Verificar se a abertura de fissuras atende aos limites prescritos (será visto no capítulo 4).

Esses cuidados são imprescindíveis para garantir, em relação ao cálculo estrutural, a durabilidade adequada da obra. Além disso, outros fatores somam-se a estes: um bom detalhamento das armaduras, execução adequada, manutenção etc.

## ADENDO

### RESUMO DAS EXPRESSÕES E PRINCIPAIS GRANDEZAS RELACIONADAS NESTE CAPÍTULO

Neste adendo estão todas as expressões relacionadas no capítulo e também os valores das principais grandezas citadas.

#### A. Expressões e seus significados

Resistência à compressão do concreto	
	$f_{cj} = N_{rup} / A$ (1.1)
Resistência à compressão característica do concreto	
	$f_{ck} = f_{cm} \cdot (1 - 1,645 \cdot \delta)$ ou $f_{ck} = f_{cm} - 1,645 \cdot s$ (1.2)
Coefficiente de variação	
	$\delta = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{f_{di} - f_{cm}}{f_{cm}} \right)^2}$ (1.3)

Relação tensão-deformação para concretos no ELU:

Concretos de classes até C50:  $\epsilon_{c2} = 2,0\%$ ;  $\epsilon_{cu} = 3,5\%$ ;  $n = 2$

Concretos de classes C50 até C90:

$$\epsilon_{c2} = 2,0\% + 0,085\% \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53}$$

$$\epsilon_{cu} = 2,6\% + 35\% \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4$$

$$n = 1,4 + 23,4 \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4$$

Para ELS até C50, substitui-se  $f_{cd}$  por  $f_{ck}$

$$\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (1.14)$$

Relação tensão-deformação para concretos no ELU em função da resistência característica  $f_{ck}$  para concretos até classe C50

$$\sigma_c = f_{ck} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{2\%} \right)^2 \right] \quad (1.15)$$

Relação tensão-deformação para concretos no ELU em função da resistência de cálculo  $f_{cd}$  para concretos até classe C50

$$\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{2\%} \right)^2 \right] \quad (1.16)$$

Deformação específica do aço

$$\epsilon = \frac{\ell_1 - \ell_0}{\ell_0} \cdot 100 \quad (1.17)$$

Deformação específica de cálculo do aço no escoamento

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (1.18)$$

Condição de segurança

$$R_d \geq S_d \quad (1.19)$$

Resistência de projeto (cálculo)

$$f_d = \frac{f_k}{\gamma_m} \quad (1.20)$$

Resistência à tração inferior do concreto	
	$f_{ctk,inf} = 0,7 \cdot f_{ct,m} \quad (1.4)$
Resistência à tração superior do concreto.	
	$f_{ctk,sup} = 1,3 \cdot f_{ct,m} \quad (1.5)$
Resistência média à tração do concreto de classes até C50	
	$f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ct}^{2/3} \quad (1.6)$
Resistência média à tração do concreto de classes C50 até C90	
	$f_{ct,m} = 2,12 \cdot \ln(1 + 0,11 \cdot f_{ct}) \quad (1.7)$
Módulo de elasticidade secante	
	$E_{cs} = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (1.8)$
Módulo de elasticidade inicial para concretos de classes C20 a C50	
	$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ct}} \quad (1.9)$
Módulo de elasticidade inicial para concretos de classes C55 a C90	
	$E_{ci} = 21,5 \cdot 10^3 \cdot \alpha_E \cdot \left( \frac{f_{ct}}{10} + 1,25 \right)^{1/3} \quad (1.10)$
Módulo de elasticidade secante em função da resistência característica $f_{ct}$	
	$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} = \left( 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ct}}{80} \right) \cdot E_{ci} \leq E_{ci} \quad (1.11)$
Módulo de elasticidade inicial no tempo t para concretos de classes C20 até C45	
	$E_{ci}(t) = \left[ \frac{f_{ctj}}{f_{ct}} \right]^{0,5} \cdot E_{ci} \quad (1.12)$
Módulo de elasticidade inicial no tempo t para concreto de classes C50 até C90	
	$E_{ci}(t) = \left[ \frac{f_{ctj}}{f_{ct}} \right]^{0,3} \cdot E_{ci} \quad (1.13)$

Resistência de projeto (cálculo) à compressão do concreto quando a verificação se faz em data $j$ igual ou superior a 28 dias de idade	
$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (1.21)$	
Resistência de projeto (cálculo) à compressão do concreto para idades menores que 28 dias	
$f_{cd} = \frac{f_{ck,j}}{\gamma_c} \cong \beta_1 \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (1.22)$	
Coeficiente de desenvolvimento da resistência à compressão do concreto ao longo do tempo.	
$s = \begin{cases} 0,38 & \text{para concreto de cimento CPIII e CPIV} \\ 0,25 & \text{para concreto de cimento CPI e CPII} \\ 0,20 & \text{para concreto de cimento CPV - ARI} \end{cases}$	
$\beta_1 = \exp \{s \cdot [1 - (28/t)^{1/2}]\} \quad (1.23)$	
Coeficiente de ponderação de resistência	
$\gamma_m = \gamma_{m,1} \cdot \gamma_{m,2} \cdot \gamma_{m,3} \quad (1.24)$	
Resistência de projeto (cálculo) à compressão do concreto	
$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1,4} \quad (1.25)$	
Resistência de projeto (cálculo) de escoamento do aço	
$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1,15} \quad (1.26)$	
Coeficiente de ponderação de ações	
$\gamma_f = \gamma_n \cdot \gamma_D \cdot \gamma_Q \quad (1.27)$	
Valores do coeficiente adicional $\gamma_n$ para pilares e pilares-parede	
$\gamma_n = 1,95 - 0,05 \cdot b \quad (1.28)$	
Valores do coeficiente adicional $\gamma_n$ para lajes em balanço	
$\gamma_n = 1,95 - 0,05 \cdot h \quad (1.29)$	

Combinação última normal ELU e para especial de construção
$F_d = \gamma_g \cdot F_{gk} + \gamma_{eg} \cdot F_{egk} + \gamma_q \cdot (F_{qk} + \sum \Psi_{0j} \cdot F_{qjk}) + \gamma_{eq} \cdot \Psi_{0e} \cdot F_{eqk} \quad (1.30)$
Combinação última ação normal para perda do equilíbrio como corpo rígido
$S(F_{nd}) \geq S(F_{nd}) \quad (1.31)$
Combinação última ação normal para perda do equilíbrio como corpo rígido
$F_{nd} = \gamma_{gn} \cdot G_{nk} + R_d \quad (1.32)$
Combinação última ação normal para perda do equilíbrio como corpo rígido
$F_{nd} = \gamma_{gn} \cdot G_{nk} + \gamma_q \cdot Q_{nk} - \gamma_{q1} \cdot Q_{n,min} \quad (1.33)$
Combinação última ação normal para perda do equilíbrio como corpo rígido
$G_{nk} = Q_{lk} + \sum_{j=2}^m \Psi_{0j} \cdot Q_{jk} \quad (1.34)$
Combinação última ação normal para perda do equilíbrio como corpo rígido
$Q_{nk} = Q_{lk} + \sum \Psi_{0j} \cdot Q_{jk} \quad (1.35)$
Combinação última excepcional
$F_d = \gamma_g \cdot F_{gk} + \gamma_{eg} \cdot F_{egk} + F_{q1,ex} + \gamma_q \cdot \sum \Psi_{0j} \cdot F_{qjk} + \gamma_{eq} \cdot \Psi_{0e} \cdot F_{eqk} \quad (1.36)$
Combinação quase permanente ELS
$F_{d,ser} = \sum F_{gk} + \sum \Psi_{2j} \cdot F_{qj,k} \quad (1.37)$
Combinação frequente ELS
$F_{d,ser} = \sum F_{gk} + \Psi_1 \cdot F_{q1,k} + \sum \Psi_{2j} \cdot F_{qj,k} \quad (1.38)$
Combinação rara ELS
$F_{d,ser} = \sum F_{gk} + F_{q1,k} + \sum \Psi_{1j} \cdot F_{qj,k} \quad (1.39)$

**B. Valores das principais grandezas de interesse**

Deformações específicas de concretos até C50
$\epsilon_{c2} = 2,0\text{‰}; \epsilon_{cm} = 3,5\text{‰}$
Coefficiente de Poisson do concreto
$\nu = 0,2$
Módulo de elasticidade transversal do concreto
$G_c = E_c / 2,4$

Módulo de elasticidade do aço
$E_s = 210.000 \text{ MPa}$
Peso específico concreto armado
$\gamma_a = 25 \text{ kN/m}^3$
Peso específico concreto sem armadura
$\gamma_c = 24 \text{ kN/m}^3$
Coefficiente de dilatação térmica do concreto
$\alpha_{conc} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
Coefficiente de dilatação térmica do aço
$\alpha_{aço} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

## CAPÍTULO 2

# PAVIMENTOS DE EDIFICAÇÕES COM LAJES NERVURADAS UNIDIRECIONAIS DE VIGOTAS PRÉ-MOLDADAS

### 2.1 INTRODUÇÃO

Para calcular uma estrutura composta de lajes, vigas e pilares, é necessário, antes de tudo, conhecer o tipo de pavimento ou de forro que será usado para que seja possível determinar as cargas e, posteriormente, detalhar as vigas e na sequência os pilares.

Dependendo da finalidade da edificação projetada, há um grau de exigência de funcionalidade, dimensões mínimas e ações a serem atendidas. Assim, não é possível, por exemplo, comparar o forro de uma casa popular de 60 m<sup>2</sup> com o de um teatro de 1.000 m<sup>2</sup>.

Serão considerados os pavimentos mais simples, econômicos e que resultam em boas soluções para pequenos e médios vãos, empregados principalmente em construções residenciais e comerciais de pequeno e médio porte (casas, sobrados, pequenos edifícios). No projeto desses tipos de edificações, têm sido empregados cada vez mais os sistemas de lajes nervuradas com vigotas pré-moldadas, formadas geralmente por trilhos e treliças, no lugar do sistema de lajes maciças de concreto armado.

### 2.2 DESCRIÇÃO DAS LAJES NERVURADAS COM VIGOTAS PRÉ-MOLDADAS

As lajes pré-moldadas aqui descritas são utilizadas para vencer pequenos e médios vãos e cargas não muito elevadas. Exclui-se, desta forma, as lajes pré-moldadas protendidas em forma de  $\pi$  (ou duplo T $\bar{e}$ ) e as alveolares, mostradas nas figuras 2.1a e 2.1b.

Assim, serão estudadas as lajes nervuradas unidirecionais compostas de vigotas pré-moldadas dos tipos "trilho" e "treliça", chamadas, doravante, de lajes pré-moldadas ou simplesmente de lajes trilho e lajes treliça. Nas normas brasileiras que tratam dessas lajes, a seguir relacionadas, elas são chamadas de lajes pré-fabricadas:

- ABNT NBR 14859 – 1ª de maio de 2002: laje pré-fabricada – requisitos. Parte 1: lajes unidirecionais;
- ABNT NBR 14859 – 2 de maio de 2002: laje pré-fabricada – requisitos. Parte 2: lajes bidirecionais;

- ABNT NBR 14860 – 1ª de maio de 2002: laje pré-fabricada – pré-laje – requisitos. Parte 1: lajes unidirecionais;
- ABNT NBR 14860 – 2 de maio de 2002: laje pré-fabricada – pré-laje – requisitos. Parte 2: lajes bidirecionais;
- ABNT NBR 14861 – 28 de novembro de 2011: lajes alveolares pré-moldadas de concreto protendido – requisitos e procedimentos.
- ABNT NBR 14862 – 30 de maio de 2002: armaduras treliçadas eletrossoldadas – requisitos.

Essas lajes são formadas por elementos pré-moldados chamados de vigotas (trilho, de concreto armado ou protendido, ou treliça), por lajotas (normalmente cerâmicas) e por uma “capa de concreto” moldada no local (Figura 2.1c e 2.1d). A armadura do elemento tipo trilho é composta de barras retas colocadas na parte inferior deste. Em relação ao elemento tipo treliça, sua armadura é uma treliça espacial de aço formada por três banzos paralelos e diagonais laterais de forma senoidal, soldadas por processo eletrônico aos banzos (Figura 2.1e).

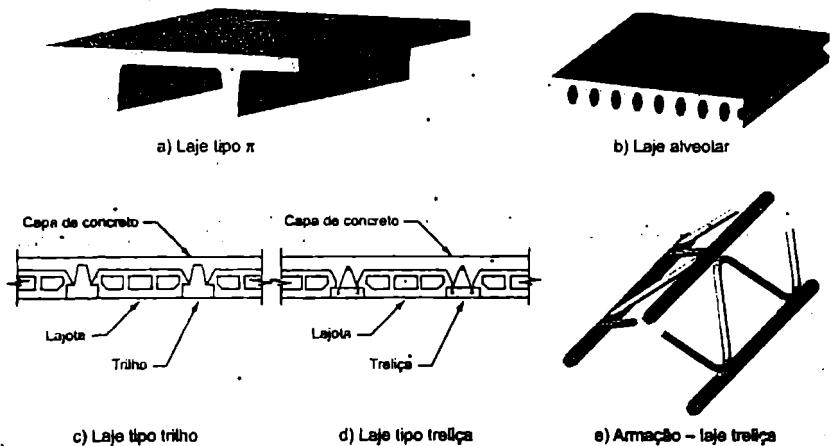


Figura 2.1 Seções transversais de lajes pré-moldadas: a) tipo  $\pi$ ; b) alveolar; c) tipo trilho; d) tipo treliça; e) armadura da nervura da laje tipo treliça.

A ABNT NBR 14859-1:2002 define o seguinte:

**Lajes pré-fabricadas unidirecionais (item 3.1):** são lajes nervuradas constituídas por nervuras principais longitudinais dispostas em uma única direção, podendo ser empregadas algumas nervuras transversais perpendiculares às nervuras principais.

**Vigotas pré-fabricadas (item 3.1.1):** são constituídas por concreto estrutural, executadas industrialmente fora do local de utilização definitivo da estrutura, ou mesmo em

canteiros de obra, sob rigorosas condições de controle de qualidade. Englobam total ou parcialmente a armadura inferior de tração, integrando parcialmente a seção de concreto da nervura longitudinal. Podem ser:

- a) de concreto armado com seção de concreto usualmente formando um "T" invertido, com armadura passiva totalmente englobada pelo concreto da vigota; utilizadas para compor as lajes de concreto armado (LC);
- b) de concreto protendido com seção de concreto usualmente formando um "T" invertido, com armadura ativa pré-tensionada totalmente englobada pelo concreto da vigota; utilizadas para compor as lajes de concreto protendido (LP);
- c) treliçadas com seção de concreto formando uma placa, com armadura treliçada (conforme ABNT NBR 14862:2002), parcialmente englobada pelo concreto da vigota. Quando necessário, deverá ser complementada com armadura passiva inferior de tração totalmente englobada pelo concreto da nervura; utilizadas para compor as lajes treliçadas (LT).

As seções transversais das lajes com vigotas do tipo trilho em concreto armado e concreto protendido (vencem vãos maiores que as usuais de concreto armado) são mostradas nas figuras 2.2 e 2.3 (figuras 1 e 2 da ABNT NBR 14859-1:2002, em que são identificadas por LC e LP respectivamente), e a seção transversal das lajes com vigotas do tipo treliça está apresentada na Figura 2.4 (Figura 3 da ABNT NBR 14859-1:2002, em que são identificadas por LT).

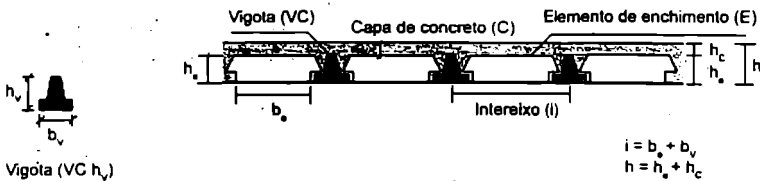


Figura 2.2 Laje pré-fabricada com vigotas de concreto armado (LC).

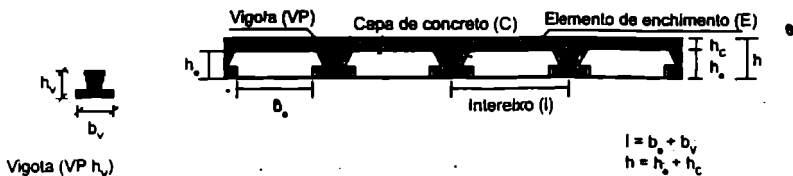


Figura 2.3 Laje pré-fabricada com vigotas de concreto protendido (LP).

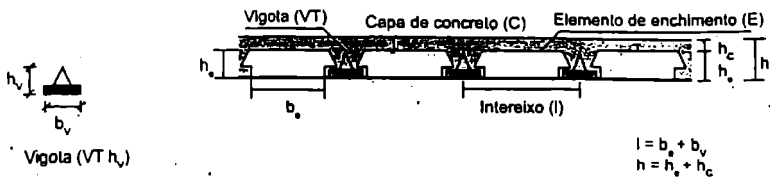


Figura 2.4 Laje pré-fabricada com vigotas treliçadas (LT).

Os elementos pré-moldados, nas fases de montagem e concretagem, são os elementos resistentes do sistema e têm capacidade de suportar, além do seu peso próprio, a ação das lajotas, do concreto da capa e de uma pequena carga acidental (alguém se locomovendo) para um vão normalmente de até 1,5 m. Desta maneira, o escoramento necessário para executar uma laje deste tipo não requer um grande número de pontalotes ou escoras. Além disso, para executar a concretagem da capa não é necessário usar fôrmas, como é o caso das lajes maciças de concreto, pois o elemento pré-moldado e a lajota fazem esse papel. Esta é a principal vantagem deste tipo de laje: não se gasta fôrma, e é necessário pouco escoramento.

Como principais desvantagens podem ser destacadas a dificuldade na execução das instalações prediais e os valores dos deslocamentos transversais, bem maiores que os apresentados pelas lajes maciças.

As lajes aqui descritas, embora usualmente chamadas de pré-moldadas, são, na verdade, parcialmente pré-moldadas, pois têm apenas um dos seus componentes, a vigota (tipo trilho ou treliça), feito fora de posição em que atuará. Isso se explica em razão da limitação de transporte vertical.

Caso se optasse por uma solução em que o pavimento fosse composto apenas de elementos pré-moldados, haveria necessidade, em razão do peso desses elementos, de empregar equipamentos mecânicos para colocá-los na posição final. Também por essa razão, são empregadas lajotas cerâmicas com resistência relativamente baixa, porém suficiente para a finalidade em questão, sendo, acima de tudo, leves. Além delas, existem no mercado elementos de enchimento de concreto, isopor (EPS), concreto airado etc., permitindo o uso de um número menor de vigotas.

Na ABNT NBR 14859-1:2002, item 3.1.3, é admitida **armadura longitudinal complementar** apenas em lajes treliçadas, quando da impossibilidade de ser colocada na vigota treliçada toda a armadura passiva inferior de tração necessária.

Ainda segundo a ABNT NBR 14859-1:2002, item 3.1.3, deve ser colocada uma **armadura de distribuição** posicionada na capa, nas direções transversal e longitudinal, para a distribuição das tensões oriundas de cargas concentradas e para o controle da fissuração. Conforme o item 5.6, essa armadura deve ter seção de no mínimo  $0,9 \text{ cm}^2/\text{m}$  para aços CA25, e de  $0,6 \text{ cm}^2/\text{m}$  para aços CA50 e CA60 e tela soldada, contendo três barras por metro, pelo menos.

No caso em que se desejam nervuras longitudinais contínuas, deve ser disposta na capa, sobre os apoios, nas extremidades das vigotas e no mesmo alinhamento da nervura, uma armadura superior de tração, segundo o item 3.1.3 da ABNT NBR 14859-1:2002.

Finalmente, descreve-se como são executados os pavimentos de lajes pré-moldadas. Na Figura 2.5 são representadas, em um mesmo painel de laje, todas as etapas do processo construtivo:

**Etapa 1:** nivelamento e acerto do piso e execução do escoramento, normalmente composto de pontaletes e “guias mestres” (tábuas), as quais devem ser colocadas em espelho; nessa etapa, ainda deverão ser executadas as contraflechas, quando necessárias;

**Etapa 2:** colocação das vigotas, posicionando lajotas (ou outro material de enchimento) nas extremidades como gabarito do espaçamento entre vigotas; duas situações são possíveis:

- **Apoio das vigotas sobre a estrutura de concreto armado:** as vigotas devem apoiar-se sobre as fôrmas, após estas estarem alinhadas, niveladas, escoradas e com a armadura colocada e posicionada; devem penetrar nos apoios pelo menos 5 cm e no máximo igual a metade da largura da viga; a concretagem das vigas deve ser simultânea à execução da capa;
- **Apoio das vigotas diretamente sobre alvenaria:** neste caso, deve-se respaldar a alvenaria e distribuir uma ferragem sobre ela para se formar uma cinta de solidarização; as vigotas devem penetrar nos apoios de modo semelhante ao anterior, e a concretagem da cinta também deve ser simultânea à da capa;

**Etapa 3:** colocação dos elementos de enchimento (lajotas cerâmicas, blocos de EPS ou outros), tubulação elétrica, caixas de passagem etc.; os blocos da primeira carreira podem ter um dos lados apoiados diretamente sobre a parede e o outro sobre a primeira linha de vigotas;

**Etapa 4:** colocação das armaduras de distribuição e negativas (quando necessário), conforme indicação (bitola, quantidade e posição), que deve ser fornecida pelo projetista ou fabricante; a armadura negativa deve ser apoiada e amarrada sobre a armadura de distribuição (e esta colocada transversalmente às vigotas principais);

**Etapa 5:** limpeza cuidadosa da interface entre as nervuras e o concreto a ser lançado, evitando-se a presença de areia, pó, terra, óleo ou qualquer substância que possa prejudicar a transferência de esforços entre as superfícies de contato;

deve-se sempre umedecer a interface antes da concretagem, sem que, entretanto, haja acúmulo de água;

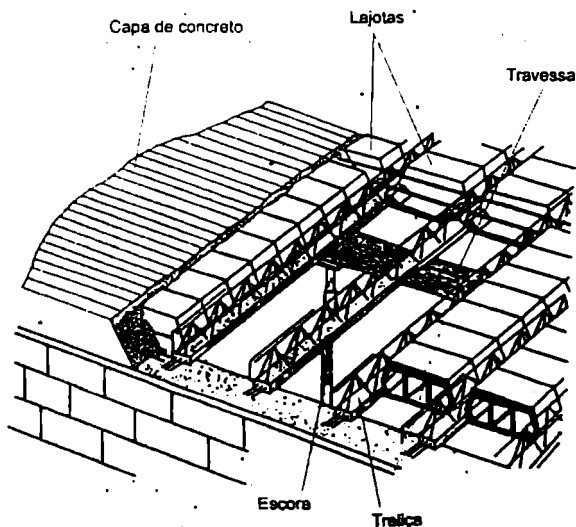
**Etapa 6:** concretagem da capa de concreto, que deve ser acompanhada de alguns cuidados:

- Colocar passadiços de madeira para evitar que as lajotas se quebrem;
- Adensar o concreto suficientemente para que ele penetre nas juntas entre as vigotas e os elementos de enchimento;
- Efetuar boa cura, molhando bem a superfície da laje de concreto durante pelo menos três dias após a concretagem;

**Etapa 7:** retirada do escoramento, que deve ocorrer aproximadamente após 15 dias do lançamento do concreto. Nos edifícios de múltiplos pavimentos, o escoramento do piso inferior não deve ser retirado antes do término da laje imediatamente superior. Deve ser verificada a resistência do concreto na data da retirada, como indicado na seção 1.8.2.4 do capítulo 1.

As lajes apresentadas até aqui caracterizam-se por nervuras (formadas pela vigota e pelo concreto moldado no local até à meia distância entre as duas vigotas adjacentes, como na Figura 2.7d) alinhadas segundo apenas uma direção, como pode ser visto na Figura 2.5, recebendo, portanto, a denominação de lajes nervuradas **unidirecionais**.

Há a possibilidade do uso de vigotas e calhas pré-moldadas para se obter uma laje com nervuras em duas direções.



**Figura 2.5** Detalhes construtivos de lajes pré-moldadas (manual Lajes Mediterrânea).

## 2.3 AÇÃO DA LAJE NAS VIGAS DO PAVIMENTO

Em virtude do seu processo construtivo, as lajes pré-moldadas unidirecionais têm como característica principal a disposição das vigotas segundo uma só direção, geralmente a do menor vão, e simplesmente apoiadas nas extremidades. Dessa forma, as vigas em que esses elementos se apoiam é que recebem a maior parte da carga. Podem, assim, ser consideradas lajes armadas em uma direção, o que se configura em uma desvantagem, pois, além de ter um esforço de flexão maior quando comparadas às placas maciças, concentram quase toda a carga em uma só direção (nas vigas em que as nervuras se apoiam).

Usualmente, admite-se que a ação das lajes pré-moldadas ocorre apenas nas vigas em que os elementos se apoiam, não considerando nenhuma ação das lajes nas vigas paralelas aos elementos. Cabem, portanto, duas questões: É correto considerar que apenas as vigas perpendiculares às nervuras recebem a ação da laje? A capa de concreto não confere rigidez, mesmo que pequena, ao pavimento na outra direção, propiciando que também as vigas laterais recebam uma parcela da carga proveniente da laje?

É possível responder, por meio de um estudo simples, em certa medida, a essas interrogações. Não se pretende estabelecer números definitivos a respeito, mas apenas apontar tendências que estudos futuros, com uma análise experimental adequada, poderão transformar em indicações precisas.<sup>7</sup>

O comportamento estrutural de um pavimento formado por laje com vigotas pré-moldadas, adequadamente solidarizadas por uma capa de concreto, pode ser mais bem entendido quando comparado ao de um pavimento executado com elementos totalmente independentes (nesse caso, a capa apenas aumenta a largura da mesa, não proporcionando rigidez na outra direção) e ao de um pavimento de laje maciça. Na verdade, as lajes pré-moldadas têm um comportamento intermediário ao dos elementos independentes e ao das lajes maciças (estas serão estudadas no capítulo 7).

### 2.3.1 ESTUDO PRELIMINAR

Inicialmente, será apresentada uma análise sobre o comportamento destas três situações básicas (elementos independentes, laje pré-moldada com capa de concreto e laje maciça), tomando-se como exemplo um pavimento bastante simples, praticamente quadrado e simplesmente apoiado nas quatro bordas (Figura 2.6).

7 Carvalho et al. (1998) e Figueiredo Filho et al. (2000).

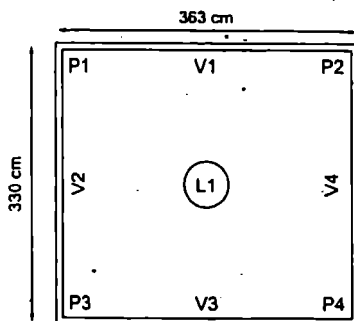


Figura 2.6 Planta do pavimento para análise do comportamento de laje pré-moldada.

Para caracterizar o comportamento desse sistema estrutural, serão comparados, para o pavimento da Figura 2.6, os esforços internos e os estados de deslocamentos obtidos para as três situações citadas e ilustradas na Figura 2.7: formado por nervuras isoladas (caso a), por laje pré-moldada – elementos mais capa (caso b) – e por placa maciça (caso c). A diferença entre os casos a e b é que, no primeiro, os elementos não têm ligação transversal (na direção dos 3,63 m), a qual, no segundo, é proporcionada pela capa de concreto.

Em todos os casos, as vigas V1, V2, V3 e V4 serão consideradas, para efeito de cálculo, indeslocáveis na vertical, situação que realmente ocorre quando se tem, por exemplo, paredes estruturais no lugar de vigas.

O objetivo em resolver esse pavimento é identificar um processo de cálculo (modelo físico e matemático) que possa ser usado com facilidade, segurança e que resulte em valores próximos dos reais para pavimentos de lajes com vigotas pré-moldadas.

Para tornar possíveis as comparações, em todos os casos são empregadas a mesma espessura total dos elementos, a mesma intensidade de carregamento atuante e as mesmas características elásticas do concreto. Os valores são:

- espessura total do pavimento = 11 cm;
- espessura da capa = 3 cm;
- $p = 5 \text{ kN/m}^2$  (ação total já considerado o peso próprio); e
- $E_c = 30000 \text{ MPa}$ .

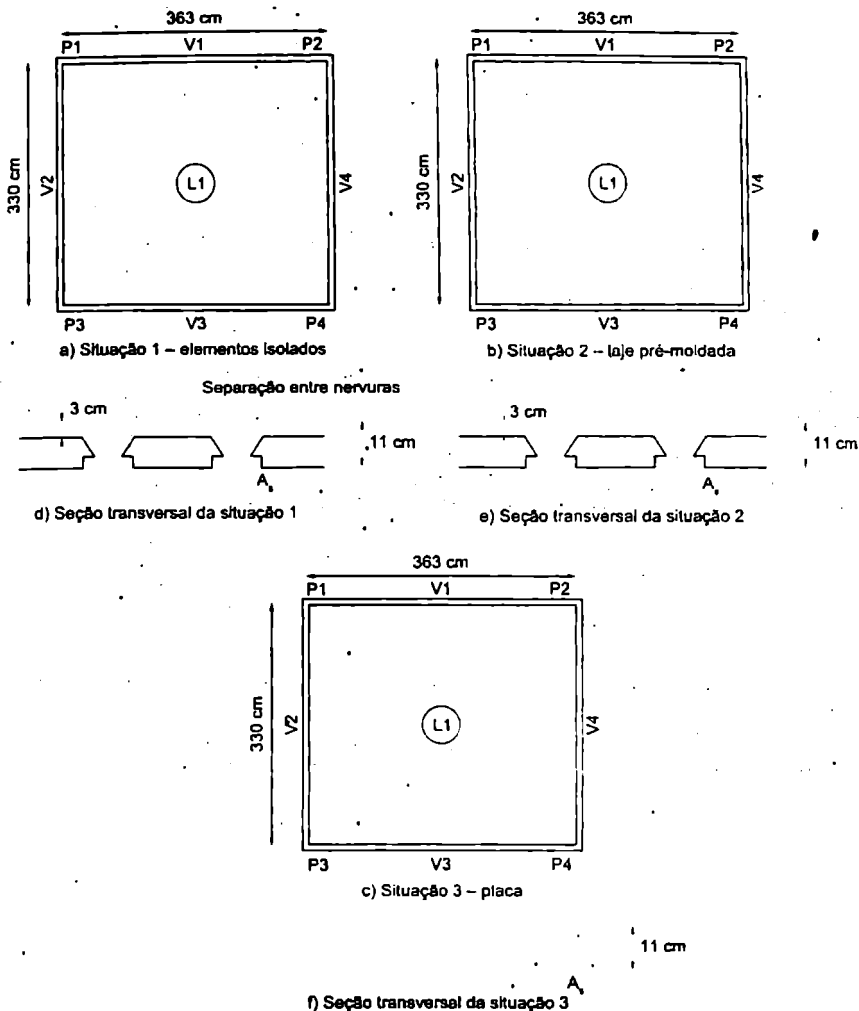


Figura 2.7 Situações analisadas: elementos isolados, laje pré-moldada e laje maciça.

A análise dos esforços e deslocamentos para os casos b e c foi feita usando-se o processo de grelha equivalente (como será visto no capítulo 7), que consiste em discretizar o pavimento por meio de um conjunto de elementos ortogonais capazes de resistir à torção e à flexão, simulando o comportamento da estrutura. A malha da grelha equivalente empregada é apresentada nas figuras 2.8 e 2.9, com a numeração dos nós (Figura 2.8) e dos elementos (Figura 2.9).

Para o caso b, as nervuras são representadas pelos elementos 132 a 231, e os elementos 12 a 110 representam a capa de concreto com espessura de 3 cm, que faz a ligação na direção transversal às nervuras. Os elementos da periferia (1 a 11, 111 a 121, 122 a 131, 232 a 241) representam as vigas do contorno. No caso c, todos os elementos da grelha são iguais nas duas direções. No caso a, como são elementos isolados, cada um trabalha como uma viga independente, como indicado na Figura 2.10.

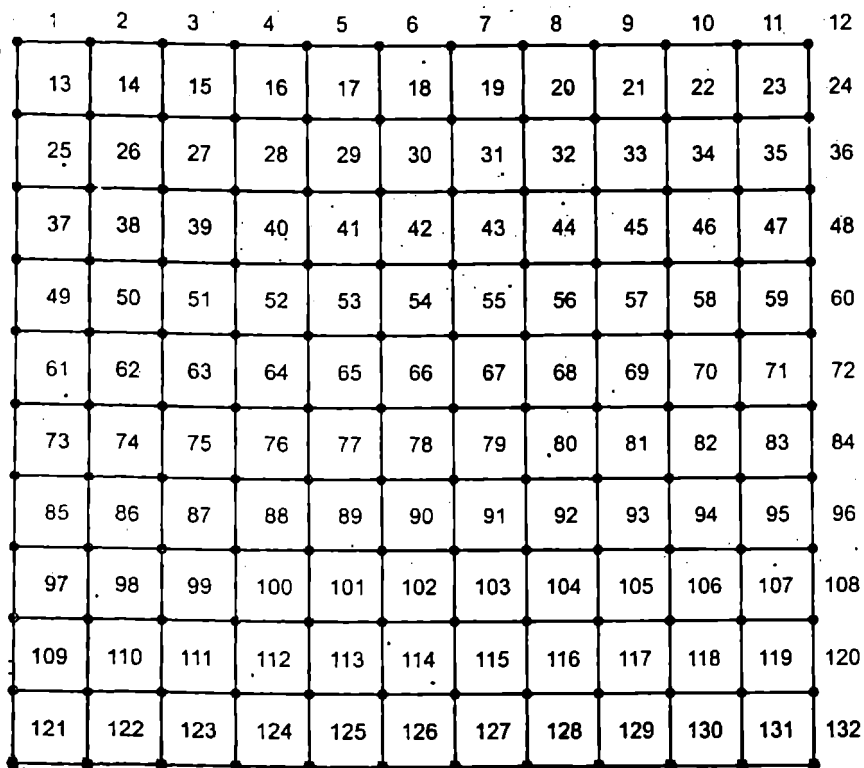


Figura 2.8 Malha da grelha equivalente usada para os casos b e c, com a numeração dos nós.

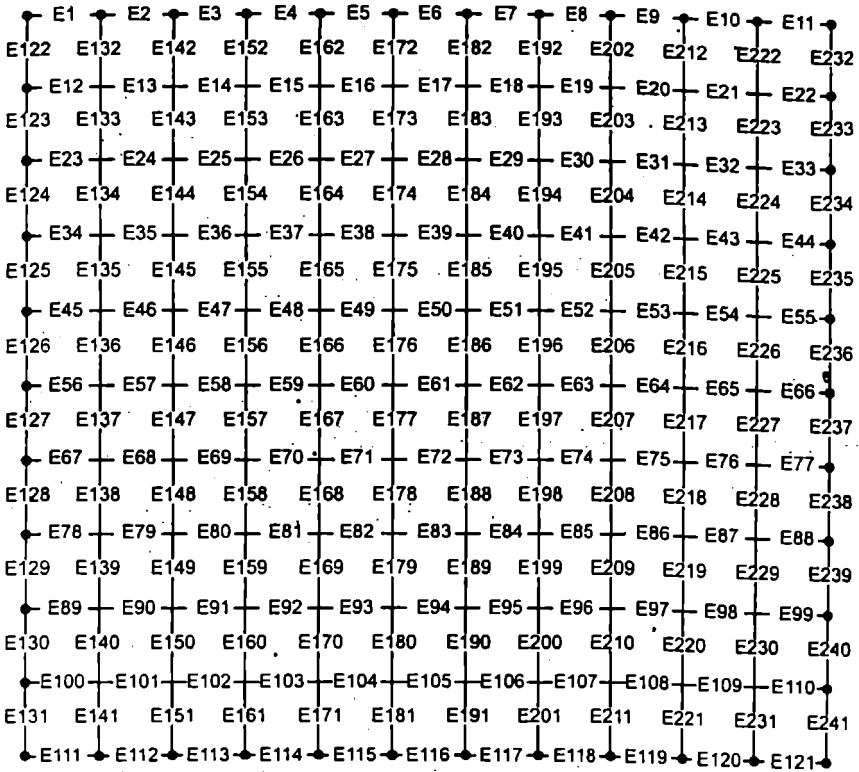


Figura 2.9 Malha da grelha equivalente para os casos b e c, com a numeração dos elementos.

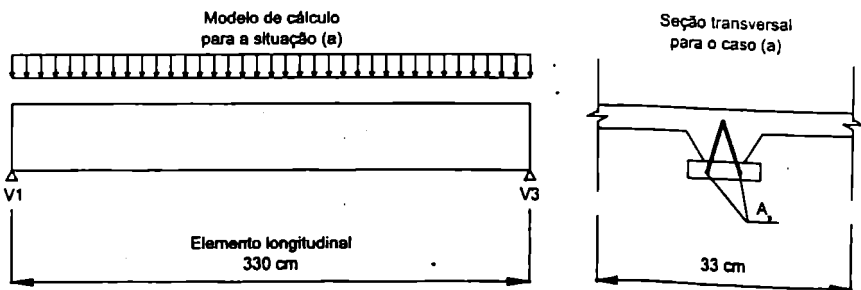


Figura 2.10 Modelo de cálculo usado para a situação a, com o elemento independente considerado como uma viga simplesmente apoiada.

A configuração deformada do pavimento para os três casos é mostrada nas figuras 2.11 a 2.13. Nos gráficos, foi empregada a mesma escala, e os deslocamentos são maiores quando todos os elementos trabalham isoladamente (caso a, Figura 2.11) e menores

quando se considera o efeito de placa (caso c, Figura 2.13). A laje pré-moldada (caso b, Figura 2.12) apresenta um comportamento intermediário, porém mais próximo do caso de elementos isolados.

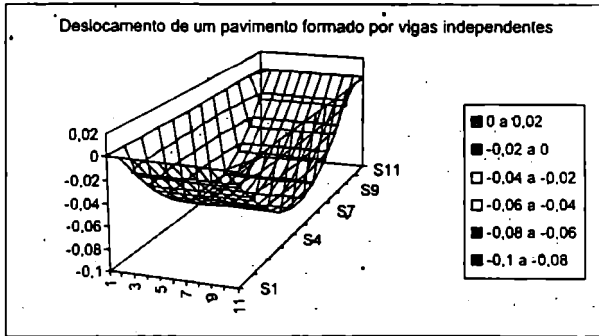


Figura 2.11 Estado de deslocamento com todos os elementos independentes (caso a).

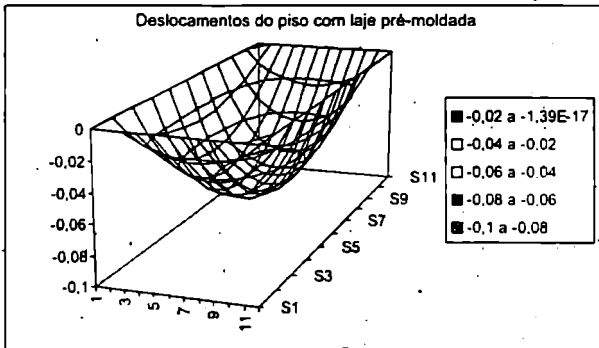


Figura 2.12 Configuração da laje com elementos pré-moldados e capa de concreto (caso b).

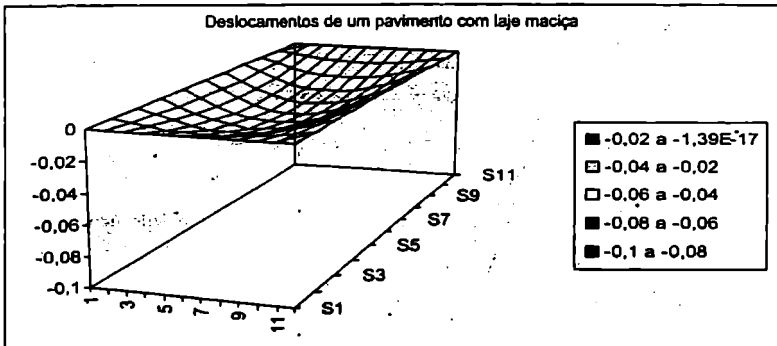


Figura 2.13 Configuração da laje maciça (caso c).

Percebe-se que no caso a todos os elementos têm a mesma linha elástica (eixo após a deformação) por causa da própria hipótese de que trabalham isoladamente, sem ligação transversal entre si. Na laje pré-moldada, caso b, as nervuras centrais apresentam praticamente a mesma linha elástica. Finalmente, na laje maciça, caso c, há diferença significativa entre as linhas elásticas dos diversos "trechos" da placa, e as deformações são bem menores. Isso ocorre por haver rigidez praticamente igual nas direções longitudinal e transversal.

Os resultados relativos à ação das nervuras nas vigas de contorno V1 e V2 estão nos gráficos da Figura 2.14. No caso dos elementos isolados, somente a viga V1 (curva E) recebe as ações dos elementos. No caso da laje maciça, as ações em V1 e V2 são praticamente iguais (curvas B e D), pois a laje é praticamente quadrada, e, portanto, a rigidez nos dois sentidos é quase a mesma. Novamente a laje pré-moldada tem um comportamento intermediário, porém com a viga V1 (viga de apoio das nervuras) absorvendo uma parcela de esforço (curva A) maior que a viga V2, paralela às nervuras (curva C).

Essas, a princípio, são as características fundamentais das placas de lados com dimensões de mesma ordem de grandeza: valores próximos dos momentos nas duas direções e distribuição equitativa das ações em todas vigas periféricas de apoio.

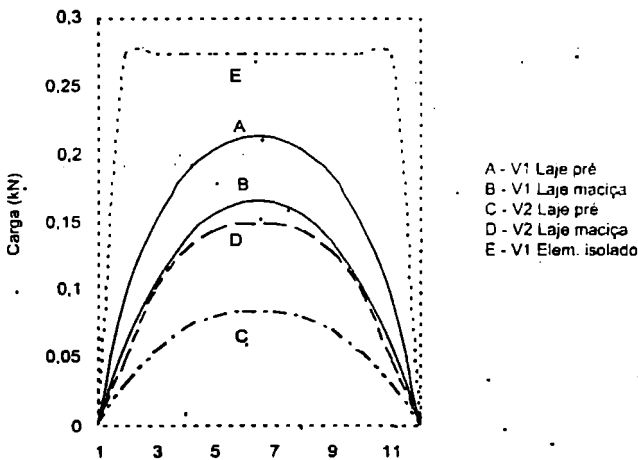


Figura 2.14 Diagrama das ações das nervuras junto às vigas V1 e V2.

Nesses exemplos foi mantida constante a relação entre os vãos (3,30 m e 3,63 m) e entre a rigidez da longitudinal e da capa, e não foi considerada a possibilidade de fissuração de trechos do concreto do pavimento. As vigas do contorno foram admitidas indesejáveis, tendo sido desprezado o efeito da fluência do concreto. Com estes exemplos iniciais foi possível ilustrar e compreender o comportamento das lajes pré-moldadas, de modo a embasar a análise de outras situações que possibilitaram estabelecer, aproximadamente,

a ação das lajes pré-moldadas em todas as vigas do pavimento, como será visto na próxima seção.

### 2.3.2 DEMAIS CASOS ANALISADOS E RESULTADOS OBTIDOS

Dando continuidade à investigação, foram analisados mais sete casos de painéis de lajes pré-moldadas (casos 1 a 7), com o objetivo de verificar a influência, nos valores das reações nas vigas de apoio, da geometria do painel, da relação entre a rigidez dos trilhos e da capa, da deslocabilidade das vigas de apoio (largura de 20 cm e altura de 40 cm) e da inércia da capa e das vigas do contorno (para simular a influência da fissuração desses elementos); os casos estão relacionados no Quadro 2.1, juntamente com os principais resultados.

Quadro 2.1 Exemplos estudados e percentual da carga na laje transferido para as vigas paralelas aos trilhos.

Caso	Dimensões do pavimento (m)	Espessura da capa (cm)	Altura da laje (cm)	Condições do contorno	Fissuração da capa	Fissuração das vigas	% absorvida nas vigas secundárias
1	3,30 · 3,63	3,0	11,0	Indeslocável	Não	Não	24
2	3,30 · 3,63	3,0	11,0	Indeslocável	Sim	Não	16
3	3,30 · 7,26	3,0	11,0	Indeslocável	Não	Não	11
4	3,30 · 7,26	3,0	11,0	Indeslocável	Sim	Não	8
5	3,30 · 3,63	3,0	11,0	Viga	Não	Não	27
6	3,30 · 3,63	3,0	16,0	Viga	Não	Não	16
7	3,30 · 3,63	3,0	11,0	Viga	Sim	Sim	20

No caso 1 (referência), foram mantidas as características da laje estudada na seção 2.3.1, no que se refere à geometria do painel (laje quadrada), à espessura da capa e da laje e à indeslocabilidade das vigas de contorno. Neste caso, não foram considerados os efeitos da fissuração da capa, dos trilhos ou das vigas de apoio.

No caso 2, estudou-se a influência da fissuração da capa de concreto (muito comum por causa da usual ineficiência dos procedimentos de cura), variando-se apenas a inércia dos elementos transversais da grelha. Considerou-se a inércia no estágio II de um elemento de seção T, que resultou em um valor próximo de 14% da inércia no estágio I (seção não fissurada).

No caso 3, mantendo-se as demais características do caso de referência, variou-se a geometria do painel, adotando uma relação próxima de 2 para as dimensões dos lados (laje retangular), a fim de quantificar, nesse caso, a diminuição que certamente ocorre nas ações da laje sobre as vigas paralelas aos trilhos.

No caso 4, variou-se novamente a inércia dos elementos transversais da grelha, para o caso de laje retangular, a fim de obter mais um valor e ilustrar melhor o efeito da fissuração da capa de concreto.

Nos três casos seguintes (5 a 7), as vigas de apoio são deslocáveis, sempre com as lajes quadradas. Nesses casos, foram estudados os efeitos da deslocabilidade das vigas e da relação entre as espessuras da capa e da laje (rigidez da capa e dos trilhos).

No caso 5, foram mantidas todas as características do caso de referência a fim de analisar especificamente o efeito da flexibilidade das vigas nas ações das lajes nas vigas.

No caso 6, adotou-se uma nova espessura de laje (mantendo-se a espessura da capa e as demais características anteriores) com o objetivo de quantificar a influência da relação entre a rigidez da capa e a dos trilhos.

Finalmente, no caso 7, foi considerada, além da fissuração da capa (diminuindo-se a rigidez dos elementos transversais da grelha), a fissuração das vigas de apoio (cuja inércia no estágio II é da ordem de 50% da inércia no estágio I).

Novamente, foi utilizado o processo de grelha equivalente para a obtenção dos resultados. Em todos os casos foi mantida a mesma malha utilizada anteriormente, apresentada nas figuras 2.8 e 2.9.

Os valores das ações, da laje nas vigas de apoio são apresentados na última coluna do Quadro 2.1. Optou-se por apresentar apenas a parcela (%) do carregamento total que é transferida para as vigas paralelas aos trilhos, objetivo principal da análise.

### 2.3.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A comparação dos valores obtidos entre os diversos casos mostra que os resultados são consistentes. Embora a limitação dos exemplos não permita quantificar precisamente a influência dos diversos parâmetros na parcela de carga absorvida pelas vigas de contorno paralelas aos trilhos, pode-se analisar esta influência de forma qualitativa, obtendo-se indicativos importantes para projeto.

Os quatro primeiros casos explicitam os efeitos da geometria da laje e da fissuração da capa, fixando-se as condições de não deslocabilidade das vigas de apoio, situação típica de lajes pré-moldadas apoiadas em paredes estruturais.

A geometria da laje influi de forma significativa na trajetória das cargas. Quanto mais próxima da forma quadrada, maior a parcela de forças absorvida pela viga paralela aos trilhos. A comparação entre os casos 1-3 e 2-4 mostra uma diminuição percentual aproximadamente constante (50%) quando a relação entre as dimensões dos lados do painel passa de 1 para 2, independentemente da fissuração da capa.

A condição de fissuração da capa de concreto também desempenha importante papel no comportamento da laje. Com a capa fissurada, tem-se a diminuição do efeito de distribuição proporcionado por ela, reduzindo a parcela de carga na viga paralela aos trilhos, conforme comparação entre os casos 1-2 e 3-4 (diminuição aproximadamente constante de 30%).

Nos últimos três casos, procurou-se aproximar as condições da situação real de lajes apoiadas em vigas, considerando a deslocabilidade e a fissuração delas (trabalha-se apenas com lajes quadradas, a fim de não estender em demasia o número de casos estudados).

O efeito de deslocabilidade das vigas de apoio é menos importante que o dos parâmetros anteriores, mas não é desprezível. Isto pode ser observado por meio de comparação entre os casos 1-5 e 2-7. Novamente, os resultados são consistentes e apresentam tendência de aumento das cargas nas vigas paralelas aos trilhos (entre 13% e 25%) para os casos em que as vigas são deslocáveis. Deve-se lembrar que na análise dos exemplos 2-7, em que o aumento foi maior (25%), há também o efeito da fissuração das vigas de apoio (além de sua deslocabilidade), não considerada no caso 5, em que o aumento das cargas nas vigas foi menor (13%).

A influência da relação entre as espessuras da capa e da laje foi analisada por meio da comparação entre os casos 5 e 6. Fica claro que quanto maior a espessura da capa em relação à espessura da laje, maior o efeito da distribuição das cargas, com variação bastante significativa (aumento de quase 70% na parcela de carga atuante nas vigas paralelas aos trilhos quando se consideram lajes de 11 cm e 16 cm).

Algumas outras situações foram estudadas (novos vãos, relações entre vãos nas duas direções, espessura da capa etc.), chegando a valores ainda maiores da porcentagem da carga total nas vigas paralelas às nervuras (pavimentos quadrados e aumento relativo da espessura da capa).

### 2.3.4 CONCLUSÕES

Como visto, não é possível admitir que as vigas paralelas aos trilhos não recebam nenhuma carga proveniente da laje. Em função dos valores obtidos, recomenda-se que aproximadamente 25% da carga total sejam transmitidos a essas vigas.

É importante destacar que quando se considera uma fração da ação para as vigas em uma direção, o valor para a outra direção é fixado automaticamente, pois a soma das ações em todas as vigas deve resultar na ação total sobre o pavimento. Assim, ao se optar, por exemplo, por usar um valor de 80% para a direção  $x$  e este valor for a favor da segurança (maior que o real), na outra direção estará sendo considerada ação menor que a real. Dessa maneira, podem ser usados dois tipos de procedimento, chamados aqui de processo simplificado e processo racional.

No processo simplificado admite-se que nas vigas perpendiculares às nervuras (direção  $y$ ) atue toda a carga proveniente da laje, e que nas vigas paralelas (direção  $x$ ) atue 25% dessa carga (este valor é um pouco menor que o máximo encontrado nos exemplos estudados), ou seja, se na laje a carga atuante total for  $P$ , nos cálculos das vigas será empregada uma carga de  $1,25 \cdot P$ , sendo, portanto, bastante a favor da segurança. Neste caso, as expressões para o cálculo das reações nas vigas são:

- Ação nas vigas perpendiculares às nervuras:

$$P_{vy} = \frac{p \cdot \ell_x \cdot \ell_y}{2 \cdot \ell_y} = \frac{p \cdot \ell_x}{2} \quad (2.1)$$

- Ação nas vigas paralelas às nervuras:

$$P_{vx} = \frac{0,25 \cdot p \cdot \ell_x \cdot \ell_y}{2 \cdot \ell_x} = \frac{0,25 \cdot p \cdot \ell_y}{2} \quad (2.2)$$

em que  $p$  é a carga uniformemente distribuída sobre o pavimento,  $\ell_x$  é o valor do vão na direção paralela às nervuras e  $\ell_y$  o valor do vão na direção perpendicular às nervuras.

No processo racional, admite-se que as ações nas vigas das duas direções dependem fundamentalmente das dimensões da laje. Assim, como valores limites definidos em função dos resultados encontrados no estudo, quando a relação entre os vãos for 1, nas vigas perpendiculares às nervuras (direção  $y$ ) será distribuída 75% da carga, e nas vigas paralelas (direção  $x$ ), 25% da carga. Quando a relação entre os vãos for 2, os valores serão 92% e 8%, respectivamente. As expressões para o cálculo das reações nas vigas são:

- Ação nas vigas perpendiculares às nervuras:

$$P_{vy} = \frac{(58 + 17 \cdot \lambda) \cdot p \cdot \ell_x}{200} \quad (2.3)$$

- Ação nas vigas paralelas às nervuras:

$$P_{vx} = \frac{(42 - 17 \cdot \lambda) \cdot p \cdot \ell_y}{200} \quad (2.4)$$

com  $\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x}$ , sendo  $\ell_x$  o valor do vão na direção paralela às nervuras,  $\ell_y$  o valor do vão na

direção perpendicular às nervuras e  $\ell_y \geq \ell_x$ ; para  $\ell_y \geq 2 \cdot \ell_x$ , deve-se considerar  $\ell_y = 2 \cdot \ell_x$ .

Embora novas situações ainda mereçam ser estudadas, é evidente que não será possível estabelecer valores que sejam corretos para qualquer caso; o ideal é que se faça uma análise para cada caso. Os valores recomendados são limites, o que pode resultar em vigas superdimensionadas para situações particulares. O que é possível afirmar com certeza é que admitir que as vigas paralelas às nervuras não recebam nenhuma parcela do carregamento sobre o pavimento pode levar a resultados contra a segurança.

## 2.4 DETERMINAÇÃO DAS FLECHAS NAS LAJES PRÉ-MOLDADAS

Um fator de vital importância no projeto das lajes com vigotas pré-moldadas é o cálculo das flechas (deslocamento máximo). Sugere-se que, a favor da segurança, ele seja feito considerando-as com o comportamento de elementos isolados, pois, para as três situações analisadas inicialmente (seção 2.3.1), as flechas resultaram em 0,0874, 0,0750 e 0,0198 cm (casos a, b, c, respectivamente). O efeito da fissuração (capítulo 1, seção 1.1) pode ser considerado por meio de uma inércia média  $I_m$ , determinada a partir do fato de que uma viga possui seções fissuradas e não fissuradas e cujo cálculo é mostrado na seção 4.8 do capítulo 4.

O efeito da fluência do concreto (deformação ao longo do tempo sob ações permanentes) também deve ser considerado na avaliação da flecha final, de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, como será visto na seção 4.8.

Assim, a flecha, ainda sem os efeitos da fluência do concreto para a situação de nervuras simplesmente apoiadas nas extremidades, é representada por:

$$a = \frac{5 \cdot p \cdot \ell^4}{384 \cdot E_c \cdot I_m} \quad (2.5)$$

em que:

$p$  – ação atuante em uma nervura;

$\ell$  – vão do tramo (normalmente a distância entre os eixos das vigas de apoio) da nervura;

$E_c$  – módulo de elasticidade do concreto; e

$I_m$  – inércia média (seção 4.8).

A análise feita até este momento refere-se apenas a um painel de laje, ou seja, as nervuras são simplesmente apoiadas nas vigas do contorno; outras situações, como vigotas que se estendem sobre dois painéis (contínuas), são vistas no Anexo 1.

## 2.5 MOMENTO FLETOR E MODELO PARA O CÁLCULO DA ARMADURA

Para determinar o momento fletor nas nervuras, é interessante observar a Figura 2.15, em que estão os diagramas de momentos da região central do pavimento para os três casos iniciais analisados na seção 2.3.1. Novamente, a placa apresenta os menores valores, e os resultados da laje pré-moldada (indicada na figura como nervura) e dos elementos isolados são relativamente próximos. Esse fato permite recomendar que o momento máximo de uma nervura de laje pré-moldada simplesmente apoiada seja calculado, a favor da segurança, como o de um elemento isolado, expresso por:

$$M_{\text{máx}} = \frac{p \cdot \ell^2}{8} \quad (2.6)$$

em que  $p$  é a carga atuante na nervura e  $\ell$ , seu vão.

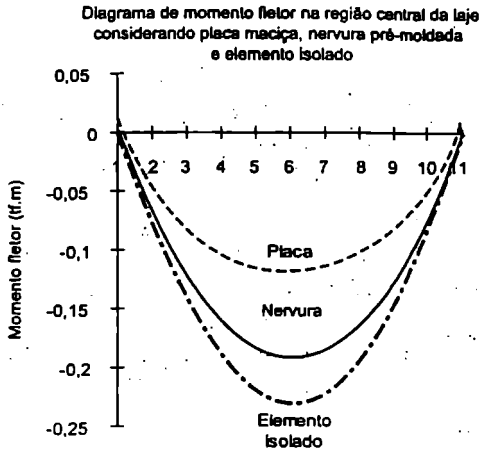


Figura 2.15 Diagrama de momento fletor na região central da placa.

O modelo matemático para o cálculo da laje, como foi visto, é o de um conjunto de “vigas” paralelas que trabalham praticamente independentes, podendo ser adotada uma seção transversal em forma de “T” (por exemplo, a da Figura 2.16). Além disso, nas lajes contínuas deve-se, antes de iniciar a concretagem da capa de concreto, colocar armadura junto à face superior do piso nas regiões de apoio das nervuras para limitar a abertura das fissuras, mesmo que as nervuras sejam calculadas como simplesmente apoiadas.

Segundo o item 5.4 da ABNT NBR 14859-1:2002, as vigotas devem ter uma largura mínima tal que resulte, quando montadas em conjunto com os elementos de enchimento, uma nervura com largura mínima de 4,0 cm. Cabe destacar que a ABNT NBR 6118:2014, no item 13.2.4.2, indica que para lajes nervuradas moldadas no local “a espessura da nervura não pode ser inferior a 5 cm”.

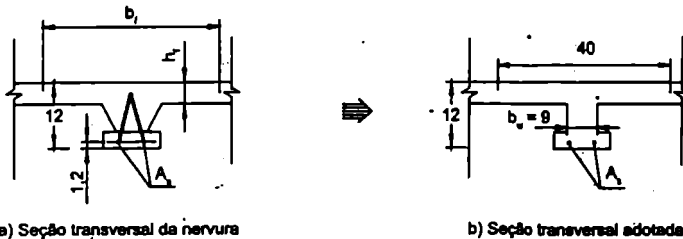


Figura 2.16 Esquema da seção transversal da laje e o respectivo modelo adotado.

Pelo modelo de cálculo empregado, vê-se que a seção transversal resiste melhor aos momentos "positivos" (tracionam a face inferior) que aos "negativos", pois a região de concreto disponível junto à borda inferior da laje (região comprimida para momento negativo) é bem menor que a região junto à face superior. Assim, em lajes contínuas, nem sempre é possível obter, junto aos apoios intermediários, o momento negativo total indicado pelo cálculo. Por este motivo e também porque em obras de pequeno porte é difícil garantir o posicionamento correto da armadura negativa (durante a movimentação dos operários, ela pode se deslocar), neste trabalho, a menos que haja indicação contrária, serão considerados sempre os painéis pré-moldados simplesmente apoiados; as recomendações feitas anteriormente referem-se a esta situação. No Anexo 1 encontram-se considerações sobre nervuras contínuas.

As lajotas, normalmente cerâmicas, não trabalham estruturalmente e apenas servem de forma para o concreto da capa. A capacidade resistente do piso é estabelecida pelo trilho (ou treliça) e pela capa de concreto feita no local. É importante que o peso da lajota seja o menor possível e que a capa de concreto seja adequadamente resistente.

A resistência da nervura pré-moldada da laje tipo trilho, antes da concretagem da capa, é estabelecida pelo concreto trabalhando à compressão e a armadura, à tração. No caso da laje tipo treliça, a resistência do elemento pré-moldado ocorre praticamente em razão da treliça espacial de aço. Como a altura da treliça é maior que a do trilho, esta última necessita, em princípio, mais escoramento (menor vão entre as linhas de escoramento). A treliça metálica serve também, após a concretagem da capa, como ligação entre o concreto do elemento pré-moldado e o concreto da capa, melhorando o comportamento do conjunto.

Com base no modelo descrito, é possível montar um procedimento de cálculo que permite dimensionar a altura e a armadura longitudinal necessárias nas lajes pré-moldadas. Na prática, costuma-se tabelar os resultados obtidos por este procedimento, a fim de que o engenheiro possa usar determinada laje pré-moldada sem efetuar todo o cálculo, embora esse procedimento não seja o mais adequado, como se discutirá na seção 2.7.2. O melhor é que o projetista efetue o dimensionamento para cada situação que se apresente.

## 2.6 VERIFICAÇÃO AO CISALHAMENTO

A verificação ao cisalhamento e o cálculo da armadura transversal nas lajes com vigotas pré-moldadas podem ser feitos como em vigas, pois elas são, na verdade, vigas simplesmente apoiadas ou vigas contínuas. Entretanto, pelas dificuldades de se colocar essa armadura em elementos de pequena altura, como são as nervuras, seu emprego não é comum. Isso é possível e permitido pelas normas se essas lajes forem consideradas como lajes nervuradas moldadas no local, o que não deixa de ser correto, pois se pode admitir que as características de concreto pré-moldado, nesses casos, são apenas transitórias.

No caso das nervuras com armadura treliçada, embora as diagonais laterais possam contribuir na resistência ao cisalhamento, não é usual contar com essa colaboração.

Nas lajes nervuradas, aqui tomadas como referência, é possível prescindir da armadura transversal, verificando-se apenas a tração diagonal sob flexão e cisalhamento (equação 2.7) e o esmagamento do concreto das bielas comprimidas. Serão apresentados os procedimentos de verificação das lajes ao cisalhamento de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, os quais se aplicam às lajes armadas em uma ou em duas direções, e serão transcritos, a seguir, apenas os itens que definem as condições para não utilização de armadura de cisalhamento.

No item 13.2.4.2 a norma permite, para lajes nervuradas com espaçamento entre eixos de nervuras menor ou igual a 65 cm, considerar os critérios de laje para verificar o cisalhamento da região das nervuras; caso contrário, elas devem ser verificadas como vigas. Ainda de acordo com o item 13.2.4.2, é permitida a verificação ao cisalhamento como lajes para nervuras com espaçamento entre 65 cm e 90 cm se a largura média das nervuras for maior que 12 cm.

As lajes podem prescindir de armadura transversal para resistir aos esforços de tração devidos à força cortante, conforme o item 19.4.1 da norma, se a força cortante solicitante de cálculo ( $V_{Sd}$ ), a uma distância  $d$  da face do apoio, for menor ou igual à resistência de projeto ao cisalhamento ( $V_{Rd1}$ ), para situação sem armadura de protensão (a verificação pode também ser feita em termos de tensão, bastando dividir tudo por  $b_w \cdot d$ ), ou seja:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd1} = [\tau_{Rd} \cdot k \cdot (1,2 + 40 \cdot \rho_1)] \cdot b_w \cdot d \quad (2.7)$$

em que:

$\tau_{Rd} = 0,25 \cdot f_{ctd} = 0,25 \cdot f_{ctk,inf} / \gamma_c$  (veja seção 1.6.2.3, equações 1.4, 1.5 e 1.6) é a tensão resistente de cálculo ao cisalhamento;

$$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{b_w \cdot d} \leq 0,02;$$

$A_{s1}$ , nas lajes com vigotas pré-moldadas, pode ser tomada como a armadura longitudinal total de todas as nervuras existentes no trecho considerado;

$d$  é a altura útil das nervuras;

$b_w$  é a soma das larguras das nervuras no trecho considerado (item 17.4.1.1.2);

em lajes, é usual que o trecho considerado seja uma faixa de largura igual a 1,0 m;

$k$  é um coeficiente que tem os seguintes valores:

- Para elementos em que 50% da armadura inferior não chegam até o apoio:  $k = |1|$ ;
- Para os demais casos:  $k = |1,6 - d|$ , não menor que  $|1|$ , com  $d$  em metros.

## 2.7 CRITÉRIOS PARA ESCOLHA DA LAJE PRÉ-MOLDADA

Todo projeto de uma estrutura de concreto armado, assim como o de um pavimento de lajes com nervuras pré-moldadas, é feito de maneira que garanta em todos os elementos componentes a segurança às ações aplicadas (o estado limite de colapso não será atingido), e que cada elemento funcione sem apresentar grandes deformações, atendendo ao estado limite de deformação excessiva.

Neste tópico, são apresentadas indicações que orientam a escolha da altura e armadura a empregar nas nervuras das lajes pré-moldadas, de modo que haja segurança adequada, conforto aos usuários e economia. Seguindo essas indicações, é possível diminuir ou mesmo evitar a maioria dos fatores que geralmente causam problemas patológicos nas edificações.

Para escolher a altura e armadura de uma laje, é preciso, inicialmente, conhecer as ações que nela atuarão, descritas a seguir.

### 2.7.1 AÇÕES ATUANTES NA LAJE

As ações verticais que podem atuar em uma laje são as seguintes:

- $q$  – carga acidental;
- $g_1$  – carga permanente estrutural (peso próprio da estrutura);
- $g_2$  – sobrecarga permanente (revestimento do forro e pisos).

Os valores das cargas a serem utilizados nas estruturas de edificações são dados pela norma ABNT NBR 6120:1980. Segundo o item 2.2.1.2, as cargas acidentais nas lajes residenciais devem ser admitidas, salvo casos especiais, uniformemente distribuídas em toda a área, havendo valores mínimos recomendados para cada local da edificação. Destacam-se, a seguir, no Quadro 2.2, alguns desses valores.

Quadro 2.2 Valores mínimos das cargas verticais para edificações.

Local	Carga (kN/m <sup>2</sup> )
Residências – dormitório, copa, cozinha e banheiro	1,5 kN/m <sup>2</sup>
Forros não destinados a depósitos	0,5 kN/m <sup>2</sup>
Dispensa, área de serviço, lavanderia e dependências de escritório	2,0 kN/m <sup>2</sup>
Compartimentos destinados a reuniões ou ao acesso público	3,0 kN/m <sup>2</sup>
Compartimentos destinados a bailes, ginástica ou esportes	5,0 kN/m <sup>2</sup>
Escadas, corredores e terraços com acesso ao público	3,0 kN/m <sup>2</sup>
Escadas, corredores e terraços sem acesso ao público	2,0 kN/m <sup>2</sup>
Lojas	2,0 kN/m <sup>2</sup>

Para que não se cometam enganos no emprego das unidades, veja o Quadro 2.3.

Quadro 2.3 Conversão de unidades mais usuais.

1 kgf = 9,8 N (Newtons) = 10 N
1 Pa (Pascal) = 1 N/m <sup>2</sup>
1 kN = 100 kgf = 0,1 tf
1 MPa (Mega Pascal) = 10 kgf/cm <sup>2</sup>

### 2.7.2 DETERMINAÇÃO DO TIPO DE LAJE

A principal razão para se usar vigotas pré-moldadas é a economia de fôrmas, e, portanto, é conveniente não variar muito sua geometria. Um molde de nervura deve servir para diversos vãos, alterando apenas a quantidade de armadura, a altura das lajotas e a espessura da capa para resistir aos esforços de flexão. É possível, uma vez fixada a geometria, a armadura e a resistência do concreto, calcular os momentos resistidos ou vãos máximos que podem ser empregados, montando quadros que permitem aos projetistas escolher os tipos de lajes sem calculá-las.

Os primeiros quadros que surgiram indicavam, para cada geometria e ação aplicada, qual o máximo vão resistido, como no Quadro 2.4 para vigota tipo trilho, em que p é a carga atuante (acidental mais sobrecarga permanente - q + g<sub>2</sub>), exceto o peso próprio da laje, que já foi computado.

Quadro 2.4 Vãos livres máximos (metros) para laje pré-moldada tipo trilho - apoio simples - inter-reixo de 33 cm.

Tipo de laje	Altura (cm)	p (kN/m <sup>2</sup> )							
		0,5	1,0	2,0	3,5	5,0	8,0	10,0	12,0
β <sub>9,5</sub>	9,5	4,20	4,00	-	-	-	-	-	-
β <sub>11</sub>	11	4,50	4,30	4,10	3,50	2,70	-	-	-
β <sub>15</sub>	15	5,70	5,50	5,30	4,50	3,40	-	-	-
β <sub>20</sub>	20	6,90	6,80	6,50	5,70	4,60	3,30	2,70	-
β <sub>25</sub>	25	8,30	8,10	7,90	6,70	5,50	4,00	3,30	2,90
β <sub>30</sub>	30	-	-	9,00	8,70	8,40	6,20	5,30	4,60
β <sub>35</sub>	35	-	-	10,3	9,90	9,60	7,20	6,20	5,40

O uso do Quadro 2.4 não é suficiente para se realizar um bom projeto, pois, além de não fornecer a armadura necessária a ser empregada, não considera a condição de deformação excessiva. A altura necessária da laje é determinada pelo momento fletor

último ou pela flecha limite (máximo deslocamento possível). O gráfico dos diagramas teórico e experimental carga  $\times$  flecha de uma nervura (vigota mais capa) de laje pré-moldada submetida à flexão, assim como o esquema de ensaio dessa laje, está apresentado na Figura 2.17.

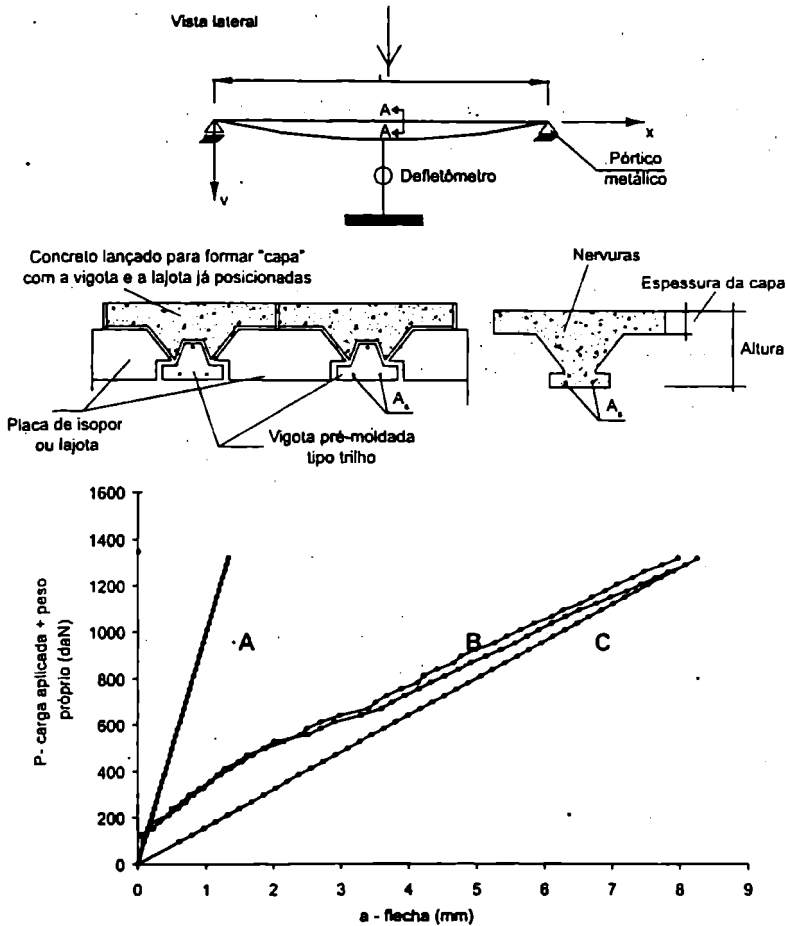


Figura 2.17 Esquema do ensaio de flexão e diagrama carga  $\times$  flecha de uma nervura de laje pré-moldada.<sup>8</sup>

No gráfico da Figura 2.17, a curva A representa os valores teóricos dos deslocamentos, considerando a seção sem fissuras, a curva B foi obtida com valores imediatos (sem fluência) medidos experimentalmente e a curva C é também relativa a valores

8 Id. ibid.

teóricos, mas admitindo as seções transversais fissuradas.<sup>9</sup> A partir de um certo ponto (neste caso, bem próximo da origem) não há mais relação linear entre a carga aplicada ( $P$ ) e a flecha ( $a$ ), pois o concreto tracionado começa a apresentar fissuras em algumas seções (como comentado na seção 1.1 do capítulo 1), diminuindo a capacidade de resistência à deformação (rigidez) da laje.

Além da deformação imediata mostrada na Figura 2.17, há ainda uma deformação que ocorre ao longo do tempo, chamada de deformação por fluência do concreto,<sup>10</sup> que depende, entre outros parâmetros, da intensidade das ações permanentes, e essa deformação é, muitas vezes, da mesma ordem de grandeza da imediata. Assim, a escolha da altura deve ser criteriosa para que as condições prescritas na norma para o estado de deformação excessiva sejam atendidas. Apesar disso, talvez até pela dificuldade em se executar os cálculos ou pela falta de informações adequadas, não tem sido prática dos projetistas considerar os efeitos da fissuração e fluência na verificação de flechas (deslocamentos máximos).

As tabelas encontradas atualmente já são um avanço em relação ao Quadro 2.4, por incorporarem a quantidade necessária de armadura a ser utilizada para atendimento da condição de colapso, porém ainda não consideram a fissuração e a fluência do concreto. Diante dessa realidade, os autores, junto com Mesquita & Carvalho,<sup>11</sup> realizaram um estudo teórico, até então inédito, financiado pela FAPESP, em que elaboraram tabelas que permitem obter altura e armadura de lajes pré-moldadas em função do vão e ação atuante, considerando as condições de colapso e de deformação excessiva, incluindo, nesta última, os efeitos da fissuração e fluência. Os critérios usados nesse trabalho, entretanto, foram relativos à ABNT NBR 6118:1980, e considerando que na redação de 2014 há uma grande variedade de verificações a serem feitas em relação ao estado limite de deformação excessiva, seria impossível englobá-las em quadros. Desta forma, os quadros são fornecidos, no Anexo 2, apenas para orientação inicial e ponto de partida para verificações mais detalhadas.

Seguindo uma tendência atual, sugere-se arbitrar valores de altura para certa laje (utilizando, por exemplo, os quadros do Anexo 2) e calcular a armadura necessária para o estado limite último, fazendo em seguida as verificações para o estado de deformação excessiva; se este não for atendido, aumenta-se a altura da laje ou o valor da armadura longitudinal – exemplo deste procedimento pode ser visto no final do capítulo 4. Como ponto de partida, sugerem-se alguns valores indicativos de altura de lajes, apresentados no Quadro 2.5, em que  $p$  é a carga atuante sem o peso próprio (carga acidental  $q$  mais sobrecarga permanente  $g_1$ ).

9 Flório et al. (2003).

10 Rogge et al. (2002), Tirintan et al. (2002, 2003) e Calavera et al. (1998).

11 Mesquita & Carvalho (1999).

**Quadro 2.5** Alturas iniciais para laje pré-moldada em função de carga e vãos livres máximos.

Altura total da laje (cm)	Peso próprio (kN/m <sup>2</sup> )	$p < 1,0 \text{ kN/m}^2$ (forro)	$2,0 \text{ kN/m}^2 < p < 5,0 \text{ kN/m}^2$
10	1,10	3,5 m	–
12	1,41	5,0 m	4,5 m
14	1,50	6,0 m	5,5 m
16 ou maior	> 1,61	–	> 5,5 m

Valores de peso próprio estimados para intereixo de 50 cm, capa de 3 cm e material de enchimento cerâmico.

A altura final da laje é sempre igual à soma da altura da lajota cerâmica (ou outro material de enchimento) com a espessura da capa de concreto. Em princípio, o ideal é utilizar a menor capa de concreto necessária, ou seja, trabalhar com o concreto da capa apenas comprimido. Porém, quando não há variedade de lajotas no mercado, emprega-se a disponível, aumentando a capa até à altura necessária.

Segundo a ABNT NBR 14859-1:2002, item 4.1, as alturas totais das lajes (h) devem ser as indicadas no Quadro 2.6 (Tabela 1 da norma), de acordo com as alturas dos elementos de enchimento. Outras dimensões podem ser utilizadas, desde que atendidas todas as disposições da norma e que fornecedor e comprador estejam de acordo.

**Quadro 2.6** Altura total da laje (medidas em centímetros).

Altura do elemento de enchimento (h)	Altura total da laje (h)
7,0	10,0; 11,0; 12,0
8,0	11,0; 12,0; 13,0
10,0	14,0; 15,0
12,0	16,0; 17,0
16,0	20,0; 21,0
20,0	24,0; 25,0
24,0	29,0; 30,0
29,0	34,0; 35,0

É importante destacar que a ABNT NBR 6118:2014, no item 13.2.4.2, que trata de lajes nervuradas, indica que a espessura da mesa, quando inexisterem tubulações horizontais embutidas, deve ser maior ou igual a 1/15 da distância entre as faces das nervuras e não menor que 4 cm. O valor mínimo absoluto da espessura da mesa deve ser 5 cm quando existirem tubulações embutidas de diâmetro menor ou igual a 10 mm.

Na versão anterior, esses valores eram respectivamente 3 cm e 4 cm. Por essa razão, os valores do Quadro 2.6 possivelmente deverão ser revistos. Ainda no mesmo item, a ABNT NBR 6118:2014 indica que, para tubulações com diâmetro  $\Phi$  maior que 10 mm, a mesa deve ter a espessura mínima de  $4\text{ cm} + \Phi$ , ou  $4\text{ cm} + 2 \cdot \Phi$  no caso de haver cruzamento destas tubulações.

Os elementos de enchimento devem ter as dimensões padronizadas, definidas no Quadro 2.7 e Figura 2.18 (Tabela 5 e Figura 4 da ABNT NBR 14859-1:2002, item 4.3.4.1), podendo ser maciços ou vazados e compostos de materiais leves, suficientemente rígidos, que não produzam danos ao concreto e às armaduras.

Quadro 2.7 Dimensões padronizadas dos elementos de enchimento (medidas em centímetros).

Altura (h) nominal		7,0 (mínima); 8,0; 9,5; 11,5; 15,5; 19,5; 23,5; 28,5
Largura (b) nominal		25,0 (mínima); 30,0; 32,0; 37,0; 39,0; 40,0; 47,0; 50,0
Comprimento (c) nominal		20,0 (mínimo); 25,0
Abas de encaixe	(a <sub>1</sub> )	3,0
	(a <sub>2</sub> )	1,5

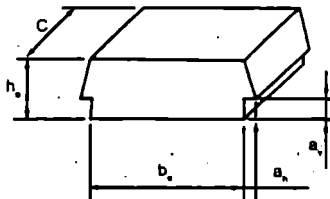


Figura 2.18 Elemento de enchimento.

Na ABNT NBR 14859-1:2002, item 5.3, considera-se a capa como parte resistente da laje se sua espessura for no mínimo igual a 3,0 cm, e, no caso da existência de tubulações, a espessura da capa acima destas deverá ser de no mínimo 2,0 cm; devem ainda ser observados os limites apresentados no Quadro 2.8 (Tabela 8 da ABNT NBR 14859-1:2002).

Quadro 2.8 Espessura mínima da capa para as alturas totais padronizadas (centímetros):

Altura total da laje	10	11	12	13	14	16	17	20	21	24	25	29	30	34
Espessura mínima da capa resistente	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5

Em relação ao Quadro 2.8, cabe a mesma observação feita em relação ao Quadro 2.6, ou seja, possivelmente ela deverá ser revista para atender aos novos limites para a

espessura das mesas da ABNT NBR 6118:2014. Em princípio, bastaria acrescentar 1 cm a cada valor indicado no Quadro 2.8.

Nos exemplos do final deste capítulo foram empregadas capas de 3 cm. O principal cuidado que se deve ter ao empregar capas de pequena espessura é evitar o possível punção (ruptura por aplicação de ação concentrada) delas. Entretanto, estudos feitos por Buscariolo et al.<sup>12</sup> permitem afirmar que a punção só ocorrerá com carga de elevada intensidade e concentrada em área menor que 2 cm<sup>2</sup>.

## 2.8 CRITÉRIOS PARA A ESCOLHA DA ALTURA DE VIGAS DE PAVIMENTOS

Foi visto que a altura das lajes é função da deformação-limite ou do momento no estado limite último, e o mesmo ocorre com as vigas de pavimentos de edifícios. Como na ABNT NBR 6118:2014 não existe recomendação sobre a altura inicial a ser adotada para vigas, decidiu-se manter, apenas como indicação, a recomendação da ABNT NBR 6118:1980, item 4.2.3.1.C, de que a altura útil  $d$  (distância do centro de gravidade da armadura tracionada à borda do concreto comprimido), a ser utilizada para evitar a verificação de deformação excessiva, pode ser determinada por:

$$d \geq \frac{\ell}{\psi_2 \cdot \psi_3} \quad (2.8)$$

sendo  $\ell$  o vão da nervura (nas lajes armadas em duas direções,  $\ell$  é o menor vão); os valores de  $\psi_2$  e  $\psi_3$  estão indicados nos quadros 2.9 e 2.10, respectivamente.

Quadro 2.9 Valores de  $\psi_2$ .

Vigas	$\psi_2$
Simplesmente apoiadas	1,0
Contínuas	1,2
Duplamente engastadas	1,7
Em balanço	0,5

Quadro 2.10 Valores de  $\psi_3$ .

Aço	$\psi_3$
CA25	25
CA50	17
CA60	15

Como o valor expresso pela equação 2.7 é apenas indicativo, sempre será necessário avaliar as flechas em vigas, de acordo com o item 17.3.2.1 da ABNT NBR 6118:2007, e compará-las aos valores limites especificados no item 13.3 da mesma norma. Os procedimentos para avaliação de deslocamentos e os conceitos de valores limites estão bastante completos na norma, e são apresentados aqui na seção 4.8 do capítulo 4.

É importante salientar que o valor da altura da viga obtido pelo procedimento da ABNT NBR 6118:1980 serve apenas de pré-dimensionamento para avaliar o peso próprio inicial da viga. Posteriormente, é necessário proceder às verificações do estado limite de deformações excessivas e estado limite de abertura de fissuras (estados limites de serviço) e às verificações de equilíbrio e resistência no estado limite último.

A Prática Recomendada IBRACON para estruturas de edifícios de nível 1 – estruturas de pequeno porte (Comitê CT-301), no capítulo 13, permite dispensar a verificação de flechas quando a relação  $l/d$  (comprimento do vão/altura útil da seção) não exceder os valores do Quadro 2.11.

Quadro 2.11 Valores de  $l/d$  máximos para dispensa de verificação de flechas.

Sistema estrutural	Valores de $100 \cdot \rho = 100 \cdot A_s / (b_w \cdot d)$				
	1,5	1,25	1	0,75	0,5
1 – Vigas ou lajes simplesmente apoiadas	14	15	16	17	20
2 – Vãos extremos de vigas/lajes (1 dir.) contínuas	18	19	20	21	25
3 – Lajes em cruz contínuas na menor direção	18	19	20	21	25
4 – Vãos internos de vigas e lajes contínuas	20	22	24	26	28
5 – Vigas ou lajes em balanço	5	5	5	5	8

Os valores são válidos para elementos em concreto armado submetidos à flexão simples para as seguintes situações:

- Aço CA50 (para outros aços, multiplicar os valores por  $(500/f_{yk})$  em MPa);
- Seções retangulares ou T com  $b_f/b_w \leq 3$  (para relações maiores, multiplicar os valores por 0,8); e
- Valores válidos para vãos até 7 metros; para vãos maiores, multiplicar os valores por  $(7/l)$ .

## 2.9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, ficou claro que, mesmo sem usar ferramentas muito sofisticadas, como programas de computadores, pode-se montar um procedimento de cálculo simples e rápido para as lajes pré-moldadas nervuradas.

A simplificação decorrente da consideração da laje pré-moldada como um conjunto de vigas isoladas pode ser adotada, já que é a favor da segurança, ao menos no que se refere à análise dos deslocamentos e do comportamento resistente da laje. Nas ações da laje nas vigas de contorno, deve-se tomar o cuidado de considerar a ação também nas vigas paralelas às nervuras, como indicado na seção 2.3.

É interessante destacar que a ABNT NBR 6118:1980 estabelecia que nas lajes nervuradas em uma direção, moldadas no local, e que serviam de parâmetro para as pré-moldadas, eram necessárias nervuras transversais sempre que houvesse cargas concentradas a distribuir ou quando o vão teórico fosse superior a 4 m, e exigia, no mínimo, duas nervuras se esse vão ultrapassasse 6 m; na ABNT NBR 6118:2007, e agora na versão de 2014, não há nenhuma menção a essas nervuras transversais.

No cálculo da flecha, pela teoria de vigas, deve ser adotada a inércia média da nervura fissurada e o efeito da fluência (capítulo 4, seção 4.8), conforme já preconizava a ABNT NBR 6118:2007, mantendo-se na versão de 2014.

Ao se considerar o modelo de viga isolada para o cálculo do momento fletor nas nervuras, obtém-se um valor sempre superior ao real, e a armadura longitudinal deve ser determinada admitindo-se a seção transversal funcionando como "T", conforme será visto no capítulo 3.

Os exemplos seguintes mostram apenas a escolha das lajes pré-moldadas com o uso de quadros e a determinação de carregamento em vigas. As verificações nos estados limites de serviço (deslocamentos limites e abertura de fissuras) e o estado limite último (dimensionamento das seções e cálculo da armadura) serão vistos nos capítulos correspondentes.

Os trabalhos de Flório e Santine,<sup>13</sup> disponíveis na internet, complementam os assuntos aqui discutidos, e Carvalho et al.<sup>14</sup> mostram um panorama das pesquisas realizadas na UFSCar sobre o tema até 2005.

## EXEMPLO 1

Escolher uma laje pré-moldada para a laje do terraço, cuja planta de formas está indicada na Figura 2.19; supor que o terraço não tem acesso ao público e que o revestimento inferior e superior ( $\gamma = 19 \text{ kN/m}^3$ ) é de 1,5 cm de espessura.

13 Flório (2003) e Santine (2005).

14 Carvalho et al. (2005).

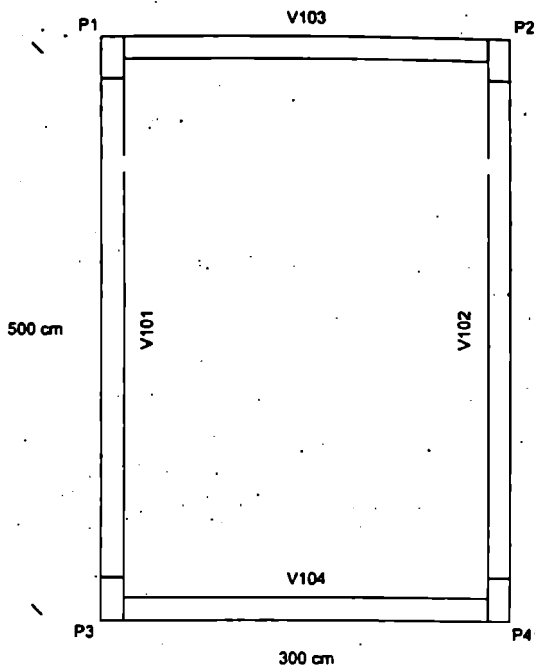


Figura 2.19 Planta de fôrmas do exemplo 1.

**a) Direção das nervuras**

A direção usual para as nervuras é a menor, no caso  $\ell = 3,0$  m.

**b) Ações atuantes**

Terraço sem acesso ao público..... $q = 2,00$  kN/m<sup>2</sup>  
 Revestimento inferior mais superior (3 cm)..... $g_2 = 0,03 \cdot 19 = 0,57$  kN/m<sup>2</sup>  
 $P_{total}$ ..... =  $2,57$  kN/m<sup>2</sup>

**c) Escolha da laje**

Utilizando o Quadro 2.5, com carga entre  $2,0$  e  $5,0$  kN/m<sup>2</sup> e vão de  $3,0$  m, resulta em laje de altura de  $12,0$  cm (chamada  $\beta_{12}$ ), com as seguintes características: altura total  $h = 12$  cm; espessura da capa =  $4,0$  cm; peso próprio  $g_1 = 1,41$  kN/m<sup>2</sup>.

**EXEMPLO 2**

Calcular, para o problema anterior, a reação da laje nas vigas.

**a) Com o processo simplificado ( $\ell_x = 3,0$  m e  $\ell_y = 5,0$  m)**

- **Vigas V101 e V102**

Como as nervuras da laje estão alinhadas na direção de 3,0 m (x), as vigas V101 e V102 recebem o total da carga. As nervuras funcionam como vigas, e a reação das nervuras nas vigas de apoio é expressa por:

$$P_{V101} = P_{V102} = \frac{P_{\text{laje}} \cdot \ell_x}{2} = \frac{(1,41 + 2,57) \cdot 3,0}{2} = \frac{3,98 \cdot 3,0}{2} = 5,97 \text{ kN/m}$$

- **Vigas V103 e V104**

De acordo com as conclusões da seção 2.3.4, será colocada nas vigas V103 e V104 (paralelas aos trilhos, direção x) 25% da carga total (metade para cada uma):

Carga total:  $(1,41 + 2,57) \cdot 3,0 \cdot 5,0 = 59,7 \text{ kN}$

25% da carga total:  $0,25 \cdot 59,7 = 14,93 \text{ kN}$

Metade para cada viga:  $(14,93/2) = 7,47 \text{ kN}$

Dividindo pelo vão da viga, a carga em cada uma será:  $p = (7,47/3) = 2,49 \text{ kN/m}$

De forma direta, para cada viga:

$$P_{V103} = P_{V104} = \frac{0,25 \cdot P_{\text{laje}} \cdot \ell_y}{2} = 0,125 \cdot 3,98 \cdot 5 = 2,49 \text{ kN/m}$$

**b) Com o processo racional** ( $\ell_x = 3,0 \text{ m}$ ,  $\ell_y = 5,0 \text{ m}$ ,  $\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x} = \frac{5}{3} = 1,67 < 2$ )

- **Vigas V101 e V102 (vigas na direção y)**

$$P_{V101} = P_{V102} = \frac{(58 + 17 \cdot \lambda) \cdot p \cdot \ell_x}{200} = \frac{(58 + 17 \cdot 1,67) \cdot 3,98 \cdot 3}{200} = 5,16 \text{ kN/m}$$

- **Vigas V103 e V104 (vigas na direção x)**

$$P_{V103} = P_{V104} = \frac{(42 - 17 \cdot \lambda) \cdot p \cdot \ell_y}{200} = \frac{(42 - 17 \cdot 1,67) \cdot 3,98 \cdot 5}{200} = 1,35 \text{ kN/m}$$

- **Verificação (a carga total na laje deve ser igual à carga total em todas as vigas)**

Carga total sobre a laje:  $P = 3,98 \cdot 3,0 \cdot 5,0 = 59,7 \text{ kN}$

Soma das ações nas vigas:  $P = 5,16 \cdot 5,0 \cdot 2 + 1,35 \cdot 3,0 \cdot 2 = 51,6 + 8,1 = 59,7 \text{ kN}$

### EXEMPLO 3

Para o problema anterior, qual a carga que a viga V101 transmite ao pilar P1, considerando o processo simplificado? Admitir que a viga seja de concreto aparente com

largura de 25 cm, que sobre ela há um parapeito de tijolos cerâmicos ( $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ ) de 1,5 m de altura e que o aço empregado é o CA50.

a) Altura da viga V101

A altura da viga V101 pode ser determinada pelo critério da ABNT NBR 6118:1980:

$$d \geq \frac{\ell}{\psi_2 \cdot \psi_3} \geq \frac{5,0}{1,0 \cdot 1,7} = 0,29 \text{ m}$$

e considerando 3 cm de cobrimento da armadura chega-se a uma altura total de  $h = 0,32 \text{ m}$ . Adota-se então  $h = 35 \text{ cm}$ .

b) Carga na viga V101

A carga devida ao peso próprio da viga é obtida multiplicando-se a área da seção transversal pelo peso específico do concreto armado ( $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$ ); o procedimento é o mesmo para o peso próprio do parapeito ( $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ ):

Peso próprio do parapeito.....  $g_2 = 0,25 \cdot 1,5 \cdot 1,8 \dots\dots\dots = 6,75 \text{ kN/m}$

Peso próprio da viga.....  $g_1 = 0,25 \cdot 0,35 \cdot 25 \dots\dots\dots = 2,19 \text{ kN/m}$

Carga proveniente da laje .....  $p_l \dots\dots\dots = 5,97 \text{ kN/m}$

Total .....  $p_t \dots\dots\dots = 14,91 \text{ kN/m} \approx 15,0 \text{ kN/m}$

c) Reação no pilar P1

$$R_{P1} = \frac{15,0 \cdot 5,0}{2} = 37,5 \text{ kN}$$

A viga V101 está representada na Figura 2.20, simplesmente apoiada nos pilares P1 e P3.

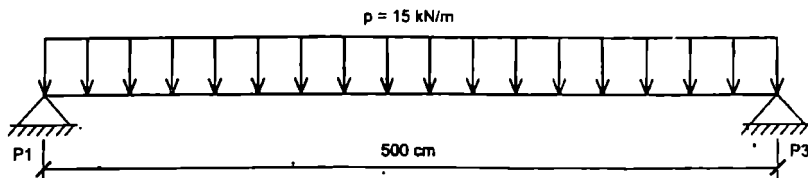


Figura 2.20 Esquema estrutural da viga V101.

EXEMPLO 4

A partir da planta de formas do pavimento da Figura 2.21 (cotas em cm), obter o carregamento na viga V101. Considera-se o processo simplificado e os seguintes dados:

- Paredes e vigas externas com 25 cm de largura;

- Paredes e vigas internas com 15 cm de largura;
- Altura das vigas externas igual a 40 cm;
- Altura das vigas internas igual a 30 cm;
- Pé-direito de 2,80 m;
- Carga acidental em todos os cômodos:  $q = 2,5 \text{ kN/m}^2$ ;
- Peso próprio adotado das lajes pré-moldadas:  $g = 1,5 \text{ kN/m}^2$ ;
- Revestimento e pisos com 6 cm de espessura;
- $\gamma_{\text{concreto}} = 25 \text{ kN/m}^3$ ;
- $\gamma_{\text{alvenaria}} = 16 \text{ kN/m}^3$ ;
- $\gamma_{\text{revestimento}} = 19 \text{ kN/m}^3$ ;
- Viga V102 apoia-se no pilar P5 e na viga V101;
- Viga V105 apoia-se no pilar P7 e na viga V101;
- Viga V101 apoia-se nos pilares P1, P2 e P3.

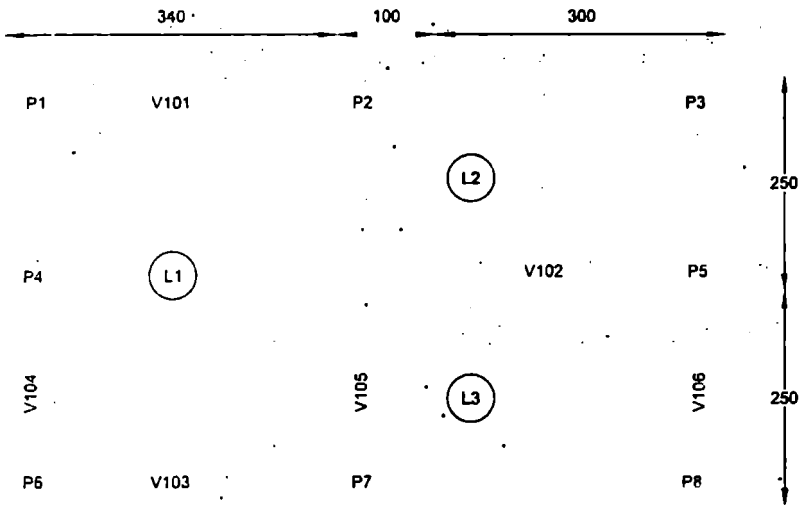


Figura 2.21 Planta de formas do pavimento do exemplo 4.

**a) Direção das nervuras das lajes**

As direções das nervuras para as lajes L1, L2 e L3 serão, respectivamente, paralelas a V101, V105 e V106, ou seja, nas menores direções das mesmas.

**b) Cargas atuantes nas lajes**

Sobrecarga .....	2,50 kN/m <sup>2</sup>
Peso próprio.....	1,50 kN/m <sup>2</sup>
Revestimento e piso.....	$0,06 \cdot 19 = 1,14 \text{ kN/m}^2$
<b>Total .....</b>	<b><math>P = 5,14 \text{ kN/m}^2</math></b>

**c) Carga na viga V102 (15 × 30 cm)**

$$\text{Peso próprio} \dots\dots\dots 0,15 \cdot 0,30 \cdot 25 = 1,125 \text{ kN/m}$$

$$\text{Peso da parede} \dots\dots\dots 0,15 \cdot 2,80 \cdot 16 = 6,720 \text{ kN/m}$$

$$\text{Contribuição das lajes L2 e L3} \dots\dots\dots \left( \frac{2,50}{2} + \frac{2,50}{2} \right) \cdot 5,14 = 12,850 \text{ kN/m}$$

$$\text{Total} \dots\dots\dots \underline{p = 20,70 \text{ kN/m}}$$

**d) Reação na viga V105**

Supondo a viga simplesmente apoiada e, portanto, desprezando o efeito de grelha:

$$R_{V105} = \frac{20,70 \cdot 4}{2} = 41,40 \text{ kN}$$

**e) Carga na viga V105 (15 × 30 cm)**

$$\text{Peso próprio} \dots\dots\dots 0,15 \cdot 0,30 \cdot 25 = 1,125 \text{ kN/m}$$

$$\text{Peso da parede} \dots\dots\dots 0,15 \cdot 2,80 \cdot 16 = 6,720 \text{ kN/m}$$

$$\text{Contribuição da laje L1} \dots\dots\dots \left( \frac{3,40}{2} \right) \cdot 5,14 = 8,738 \text{ kN/m}$$

$$\text{Contribuição das lajes L2 ou L3} \dots\dots\dots \frac{0,25 \cdot 4,00}{2} \cdot 5,14 = 2,570 \text{ kN/m}$$

$$\text{Total} \dots\dots\dots \underline{p = 19,15 \text{ kN/m}}$$

**f) Reação de V105 em V101**

$$R_{V101} = \frac{19,15 \cdot 5}{2} + \frac{41,40}{2} = 68,58 \text{ kN}$$

**g) Carga na viga V101 (25 × 40 cm)****Trecho 1 (P1 a V105)**

$$\text{Peso próprio} \dots\dots\dots 0,25 \cdot 0,40 \cdot 25 = 2,500 \text{ kN/m}$$

$$\text{Peso da parede} \dots\dots\dots 0,25 \cdot 2,80 \cdot 16 = 11,200 \text{ kN/m}$$

$$\text{Contribuição da laje L1} \dots\dots\dots \frac{0,25 \cdot 5,00}{2} \cdot 5,14 = 3,213 \text{ kN/m}$$

$$\text{Total} \dots\dots\dots \underline{p = 16,91 \text{ kN/m}}$$

**Trecho 2 (V105 a P3)**

$$\text{Peso próprio} \dots\dots\dots 0,25 \cdot 0,40 \cdot 25 = 2,500 \text{ kN/m}$$

$$\text{Peso da parede} \dots\dots\dots 0,25 \cdot 2,80 \cdot 16 = 11,200 \text{ kN/m}$$

$$\text{Contribuição da laje L2} \dots\dots\dots \left( \frac{2,50}{2} \right) \cdot 5,14 = 6,425 \text{ kN/m}$$

$$\text{Total} \dots\dots\dots \underline{p = 20,13 \text{ kN/m}}$$

Os esquemas estruturais das vigas V102, V105 e V101 estão na Figura 2.22.

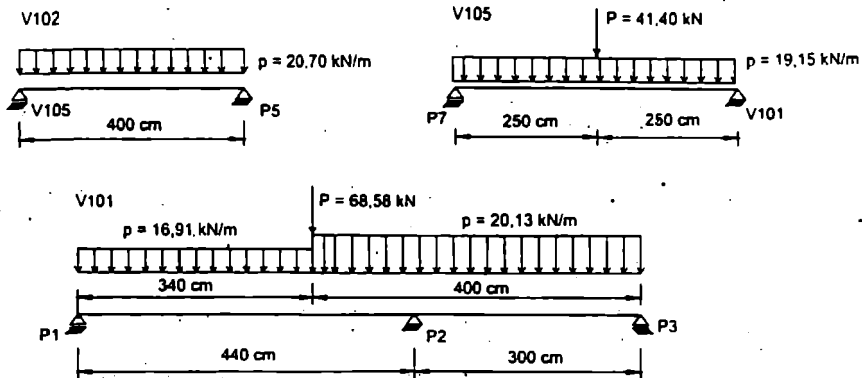


Figura 2.22 Esquema estrutural das vigas V102, V105 e V101 e respectivas cargas.

## ADENDO

### RESUMO DAS EXPRESSÕES RELACIONADAS NESTE CAPÍTULO

Ação nas vigas perpendiculares às nervuras pelo processo simplificado
$P_{vy} = \frac{p \cdot \ell_x \cdot \ell_y}{2 \cdot \ell_y} = \frac{p \cdot \ell_x}{2}$ (2.1)
Ação nas vigas paralelas às nervuras pelo processo simplificado
$P_{vx} = \frac{0,25 \cdot p \cdot \ell_x \cdot \ell_y}{2 \cdot \ell_x} = \frac{0,25 \cdot p \cdot \ell_y}{2}$ (2.2)
Ação nas vigas perpendiculares às nervuras pelo processo racional
$P_{vy} = \frac{(58 + 17 \cdot \lambda) \cdot p \cdot \ell_x}{200}$ (2.3)
Ação nas vigas paralelas às nervuras pelo processo racional
$P_{vx} = \frac{(42 - 17 \cdot \lambda) \cdot p \cdot \ell_y}{200}$ (2.4)
Flechas nas lajes pré-moldadas (simplesmente apoiadas)
$a = \frac{5 \cdot p \cdot \ell^4}{384 \cdot E_c \cdot I_m}$ (2.5)

Momento fletor para o cálculo da armadura das nervuras (simplesmente apoiadas)

$$M_{\text{mda}} = \frac{p \cdot \ell^2}{8} \quad (2.6)$$

Verificação ao cisalhamento para lajes sem armadura transversal

$$\begin{aligned} V_{\text{Sd}} &\leq V_{\text{Rd1}} = [\tau_{\text{Rd}} \cdot k \cdot (1,2 + 40 \cdot \rho_1)] \cdot b_w \cdot d \\ \tau_{\text{Rd}} &= 0,25 \cdot f_{\text{ctd}} = 0,25 \cdot f_{\text{ctd,inf}} / \gamma_c \\ k &= |1,6 - d| \geq 1 \\ \rho_1 &= \frac{A_{s1}}{b_w \cdot d} \leq 0,02; \end{aligned} \quad (2.7)$$

Indicação da altura útil mínima para vigas

$$d \geq \frac{\ell}{\psi_2 \cdot \psi_3} \quad (2.8)$$



## CAPÍTULO 3

### CÁLCULO DA ARMADURA DE FLEXÃO

#### 3.1 INTRODUÇÃO

O cálculo da armadura necessária para resistir a um momento fletor (causa tensões normais nas seções em que atua) é um dos pontos mais importantes no detalhamento das peças de concreto armado. O dimensionamento é feito no estado limite último de ruína, impondo que na seção mais solicitada sejam alcançadas as deformações específicas limites dos materiais, ou seja, o estado limite último pode ocorrer tanto pela ruptura do concreto comprimido quanto pela deformação excessiva da armadura tracionada.

O momento fletor que a seção é capaz de resistir nesta situação é  $\gamma$  vezes maior que aquele que poderá vir realmente a atuar. A discussão de qual o valor de  $\gamma$  a ser usado e como obtê-lo é feita na norma ABNT NBR 8681:2003, e resumidamente também no capítulo 1.

O estudo das seções de concreto armado tem por objetivo comprovar que, sob solicitações (efeitos das ações) de cálculo, a peça não supera os estados limites, supondo que o concreto e o aço tenham, como resistências reais, as resistências características minoradas (resistências de cálculo). Assim, as solicitações de cálculo são aquelas que, se alcançadas, levarão a estrutura a atingir um estado limite, caracterizando a sua ruína.

As considerações sobre a segurança das estruturas de concreto armado estão apresentadas no capítulo 1 (seção 1.8). Na ABNT NBR 6118:2014, os conceitos e as condições de segurança estão contidos na seção 10, "Segurança e estados limites", na seção 11, "Ações", e na seção 12, "Resistências", e em todas as demais que abordam os princípios de dimensionamento e detalhamento de diversos elementos estruturais. Os critérios de segurança baseiam-se nos estabelecidos pela ABNT NBR 8681:2003, "Ações e segurança nas estruturas". A grande novidade na versão de 2014 da ABNT NBR 6118 é a consideração de concretos com classe de C50 até C90, os quais têm características bem distintas dos que pertencem às classes de C20 até C50. Ainda assim, o novo texto da norma foi elaborado de maneira a contemplar todas as classes, o que resultou em expressões, principalmente para as utilizadas na flexão, mais gerais e complexas. Percebe-se que, no caso da flexão simples, pouca alteração e vantagem houve ao empregá-las para as classes de C50 a C90. Como a finalidade básica desta obra são as edificações usuais, serão mantidas em separado as expressões para os concretos até C50 para facilidade de uso e entendimento, embora na ABNT NBR 6118:2014 todas as categorias estejam englobadas na mesma formulação.

### 3.2 TIPOS DE FLEXÃO

O momento fletor causa flexão nos elementos estruturais, e nas seções transversais desses elementos surgem tensões normais (perpendiculares à seção). Há diversos tipos de flexão, e é preciso identificar cada um deles para que seja possível calcular esses elementos. Apresenta-se a seguir o conceito de cada um dos tipos:

- a) **Flexão normal** (simples ou composta): quando o plano do carregamento ou da sua resultante é perpendicular à linha neutra (LN; linha da seção transversal em que a tensão é nula) ou, em outras palavras, quando o plano contém um dos eixos principais de inércia da seção; nesse caso, em seções simétricas (um eixo de simetria é sempre um eixo principal de inércia), o momento fletor atua no plano de simetria.
- b) **Flexão oblíqua** (simples ou composta): quando o plano de carregamento não é normal à linha neutra; ou se o momento fletor tiver uma componente normal ao plano de simetria; ou, ainda, quando a seção não é simétrica, pela forma ou por suas armaduras.
- c) **Flexão simples**: quando não há esforço normal atuando na seção ( $N = 0$ ), a flexão simples pode ser normal ou oblíqua.
- d) **Flexão composta**: quando há esforço normal (de tração ou de compressão) atuando na seção ( $N \neq 0$ ), com ou sem esforço cortante.
- e) **Flexão pura**: caso particular da flexão (simples ou composta) em que não há esforço cortante atuante ( $V = 0$ ); nas regiões da viga em que isso ocorre, o momento fletor é constante.
- f) **Flexão não pura**: quando há esforço cortante atuando na seção.

Nas vigas, geralmente o esforço normal é desprezível (exceção às vigas protendidas) e, dessa forma, inicialmente será considerada apenas a flexão normal, simples e pura, em que  $N = 0$  e  $V = 0$ . Será analisado o dimensionamento para um caso bem simples, para posteriormente se introduzir novos conceitos e ampliar sua aplicação.

Ressalta-se que, com as hipóteses adotadas, a solução desse problema (flexão normal simples e pura) permitirá dimensionar a armadura longitudinal de vigas e lajes, pelo menos nas seções mais solicitadas à flexão.

Normalmente, valoriza-se muito o cálculo da quantidade de armadura longitudinal (de flexão) necessária e, por ser um procedimento apenas numérico, sua aplicação está bastante desenvolvida; entretanto, é preciso chamar a atenção para o fato de que o entendimento dos princípios do mecanismo de colapso (ruína) é fundamental para um detalhamento da armadura que permita uma boa execução, um bom funcionamento e, conseqüentemente, uma maior durabilidade da estrutura.

### 3.3 PROCESSO DE COLAPSO DE VIGAS SOB TENSÕES NORMAIS

Seja uma viga de concreto armado simplesmente apoiada (Figura 3.1), sujeita a um carregamento crescente que causa flexão pura na região central ( $V = 0$  e  $M$  constante); dessa maneira, na seção central, a viga é submetida a um momento fletor  $M$  crescente, que varia de zero até um valor que a leve ao colapso.

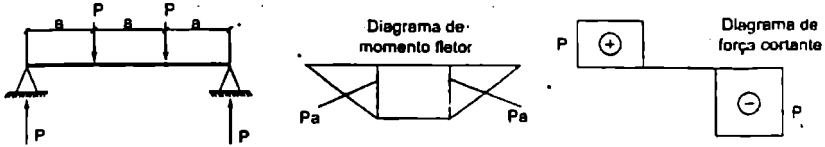


Figura 3.1 Viga simplesmente apoiada – carregamento e diagramas.

Experimentalmente, submetendo a peça a um carregamento crescente, é possível medir as deformações (distâncias  $A_1$  e  $B_1$  antes e depois de cada parcela de carga) que ocorrem em sua zona central (Figura 3.2), ao longo da sua altura. Admite-se que a seção permaneça plana durante o processo de deformação.

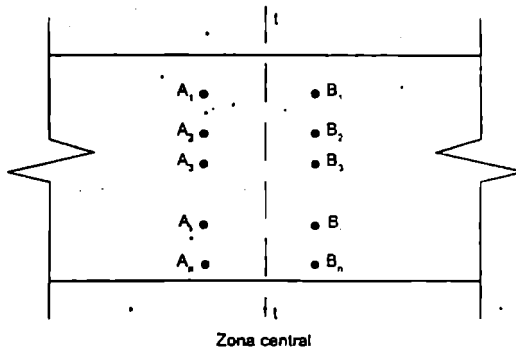


Figura 3.2 Medida de deformações na região central de uma viga.

A seção transversal central da viga de concreto armado, retangular neste caso, como a mostrada na Figura 3.3, submetida ao momento fletor  $M$  crescente, passa por três níveis de deformação, denominados de estádios, que determinam o comportamento da peça até sua ruína.

Na Figura 3.3 estão representadas as deformações e tensões no aço e no concreto e as resultantes dessas tensões.

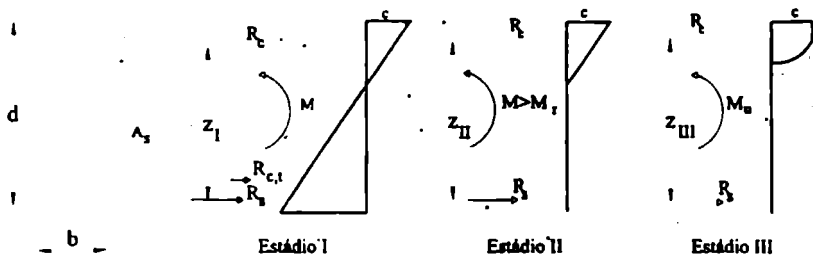


Figura 3.3 Comportamento da seção transversal de uma viga de concreto armado na flexão normal simples.

Podem-se caracterizar os três estádios de deformação de uma viga de concreto na flexão normal simples:

**Estádio I (estado elástico)** – sob a ação de um momento fletor  $M_f$  de pequena intensidade, a tensão de tração no concreto não ultrapassa sua resistência característica à tração ( $f_{ct}$ ):

- diagrama de tensão normal ao longo da seção é linear;
- as tensões nas fibras mais comprimidas são proporcionais às deformações, correspondendo ao trecho linear do diagrama tensão-deformação do concreto;
- não há fissuras visíveis.

**Estádio II (estado de fissuração)** – aumentado o valor do momento fletor para  $M_u$ , as tensões de tração na maioria dos pontos abaixo da linha neutra (LN) terão valores superiores ao da resistência característica do concreto à tração ( $f_{ct}$ ):

- considera-se que apenas o aço passa a resistir aos esforços de tração;
- admite-se que a tensão de compressão no concreto continue linear;
- as fissuras de tração na flexão no concreto são visíveis.

**Estádio III** – aumenta-se o momento fletor até um valor próximo ao de ruína ( $M_u$ ), e, para os concretos até C50:

- a fibra mais comprimida do concreto começa a plastificar a partir da deformação específica de  $\epsilon_{c2} = 0,2\%$  (2,0%), chegando a atingir, sem aumento de tensão, a deformação específica de  $\epsilon_{cu} = 0,35\%$  (3,5%);
- diagrama de tensões tende a ficar vertical (uniforme), com quase todas as fibras trabalhando com sua tensão máxima, ou seja, praticamente todas as fibras atingiram deformações superiores a  $\epsilon_{c2} = 2\%$  e chegando até  $\epsilon_{cu} = 3,5\%$ ;

- a peça está bastante fissurada, com as fissuras se aproximando da linha neutra, fazendo com que sua profundidade diminua e, conseqüentemente, a região comprimida de concreto também; e
- supõe-se que a distribuição de tensões no concreto ocorra segundo um diagrama parábola-retângulo (Figura 3.4).

Para os concretos de classes C50 a C90, as assertivas acima também se aplicam, porém com algumas mudanças nos limites de deformação e formato do diagrama tensão-deformação, como adiante será explicado.

Pode-se dizer simplificadamente que:

**Estádios I e II** → correspondem às situações de serviço (quando atuam as ações reais);

**Estádio III** → corresponde ao estado limite último (ações majoradas, resistências minoradas), que só ocorre em situações extremas.

O cálculo de dimensionamento das estruturas de concreto armado será feito no estado limite último (estádio III), pois o objetivo principal é projetar estruturas que resistam, de forma econômica, aos esforços sem chegar ao colapso; as situações de serviço são importantes, porém muitas vezes o próprio cálculo no estado limite último é o bom detalhamento da armadura conduzem às verificações destas, que deverão ser feitas quando necessário.

### 3.4 HIPÓTESES BÁSICAS PARA O CÁLCULO

As hipóteses para o cálculo no estado limite último de elementos lineares sujeitos a solicitações normais estão no item 17.2.2 da ABNT NBR 6118:2014, que engloba também as hipóteses referentes às estruturas em concreto protendido, não relacionadas aqui:

- As seções transversais permanecem planas após o início da deformação até o estado limite último; as deformações são, em cada ponto, proporcionais à sua distância até a linha neutra da seção (hipótese de Bernoulli).
- Solidariedade dos materiais: admite-se solidariedade perfeita entre o concreto e a armadura; dessa forma, a deformação específica de uma barra da armadura, em tração ou compressão, é igual à deformação específica do concreto adjacente.
- As tensões de tração no concreto, normais à seção transversal, devem ser desprezadas no ELU.
- A ruína da seção transversal (peça sob ações majoradas e materiais com resistências minoradas  $f_{cd}$  e  $f_{td}$ ) para qualquer tipo de flexão no estado limite último fica caracterizada pelas deformações específicas de cálculo do concreto ( $\epsilon_c$ ) na fibra menos tracionada e do aço ( $\epsilon_s$ ), próxima à borda mais tracionada, que atingem (uma delas ou

aindas) os valores últimos (máximos) das deformações específicas desses materiais; os diversos casos possíveis de distribuição das deformações do concreto e do aço na seção transversal definem os **domínios de deformação**, indicados na Figura 3.6 e detalhados na seção 3.6 deste capítulo.

- e) Encurtamentos últimos (máximos) do concreto no estado limite último: os valores a serem adotados para os parâmetros  $\epsilon_{c2}$  (deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico) e  $\epsilon_{cu}$  (deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura) são definidos a seguir:

- Para concretos de classes até C50:

$$\epsilon_{c2} = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ (2,0‰)} \text{ ocorre nas seções totalmente comprimidas (seção 3.6);} \quad (3.1)$$

$$\epsilon_{cu} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ (3,5‰)} \text{ ocorre nas seções sob flexão (seção 3.6)} \quad (3.2)$$

- Para concretos de classes C50 até C90:

$$\epsilon_{c2} = 2,0‰ + 0,085‰ \cdot (f_{ct} - 50)^{0,53} \text{ seções totalmente comprimidas} \quad (3.3)$$

$$\epsilon_{cu} = 2,6‰ + 35‰ \cdot [(90 - f_{ct})/100]^4 \text{ seções sob flexão} \quad (3.4)$$

- f) Alongamento último das armaduras: o alongamento máximo permitido ao longo da armadura tracionada é:

- $\epsilon_{su} = 10,0 \cdot 10^{-3} \text{ (10,0‰)}$  para prevenir deformação plástica excessiva (3.5)

- g) A tensão nas armaduras é obtida a partir dos diagramas tensão  $\times$  deformação (Figura 1.12), com valores de cálculo definidos na seção 1.8.2.5 do capítulo 1.

- h) Para concretos até a classe C50, admite-se que a distribuição de tensões no concreto seja feita de acordo com o diagrama parábola-retângulo da Figura 3.4, com base no diagrama tensão-deformação-simplificado do concreto (Figura 1.7b), com tensão máxima igual a  $0,85 \cdot f_{cd}$ ; o diagrama parábola-retângulo é composto de uma parábola do 2º grau, com vértice na fibra correspondente à deformação de compressão de 2,0‰ e um trecho reto entre as deformações 2,0‰ e 3,5‰; permite-se a substituição do diagrama parábola-retângulo por um retângulo de altura  $0,8 \cdot x$ , onde  $x$  é a profundidade da linha neutra, com a seguinte tensão:

- $0,85 \cdot f_{cd} = \frac{0,85 \cdot f_{ct}}{\gamma_c} \rightarrow$  zonas comprimidas de largura constante, ou crescente

no sentido das fibras mais comprimidas, a partir da linha neutra;

- $0,80 \cdot f_{cd} = \frac{0,80 \cdot f_{ct}}{\gamma_c} \rightarrow$  zonas comprimidas de largura decrescente no sentido

das fibras mais comprimidas, a partir da linha neutra.

No trecho de altura  $0,2 \cdot x$ , a partir da linha neutra, no diagrama retangular, as tensões de compressão no concreto são desprezadas; no trecho restante ( $0,8 \cdot x$ ), a distribuição de tensões é uniforme.

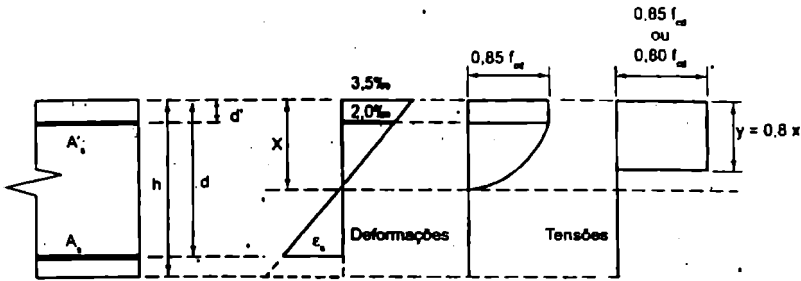


Figura 3.4 Diagramas de tensões no concreto no estado limite último para concretos até a classe C50.

- i) Para concretos das classes C50 a C90 (Figura 3.5), a distribuição de tensões no concreto se faz de acordo com um diagrama curvo e retangular, definido em 8.2.10.1 da ABNT NBR 6118:2014, com tensão de pico igual a  $0,85 \cdot f_{cd}$ , com  $f_{cd}$  definido em 12.3.3 da norma. Esse diagrama, conforme o item 17.2.2 da norma, pode ser substituído por um retângulo de profundidade  $y$  definido por:

$$y = \lambda \cdot x \quad (3.6)$$

sendo:

$$\lambda = 0,8 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (3.7)$$

$$\lambda = 0,8 - (f_{ck} - 50)/400 \text{ para } f_{ck} > 50 \text{ MPa (} f_{ck} \text{ em MPa)} \quad (3.8)$$

A tensão atuante pode ser admitida constante até a profundidade  $y$  e tomada igual a:

- No caso da largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir a partir desta para a borda comprimida;

$$\alpha_c \cdot f_{cd} \quad (3.9)$$

- No caso contrário,

$$0,9 \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \quad (3.10)$$

em que:

- Para concretos de classes até C50:

$$\alpha_c = 0,85 \quad (3.11)$$

- Para concretos de classes C50 até C90:

$$\alpha_c = 0,85 \cdot [1,0 - (f_{ck} - 50)/200] \quad (3.12)$$

As diferenças de resultados obtidos com esses dois diagramas são pequenas e aceitáveis, sem necessidade de coeficiente de correção adicional.

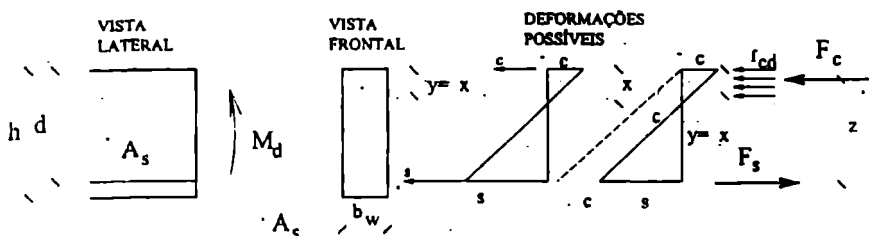


Figura 3.5 Diagramas de tensões no concreto no estado limite último para concretos de classes C50 a C90.

Observa-se que tensão de compressão do concreto, adotada no diagrama, é de 0,8 ou 0,85 de  $f_{cd}$  no caso dos concretos de classes até C50, ou  $\alpha_c$  e  $0,9 \cdot \alpha_c$  para os concretos de classes C50 a C90. Por que uma nova redução do valor da resistência, uma vez que  $f_{cd}$  já é uma redução de  $f_{ck}$  ( $f_{cd} = f_{ck}/1,4$ )? Há três motivos.

O primeiro diz respeito ao modo como é obtido o valor de  $f_{ck}$ : o ensaio é feito com um corpo de prova cilíndrico, e mesmo tendo o cuidado de colocar películas de material antiaderente para diminuir o atrito entre os pratos da prensa e as faces do corpo de prova, ele não é eliminado. Havendo atrito nas extremidades do corpo de prova, estas seções e as adjacentes ficam impedidas de se deformar horizontalmente, resultando um estado tripla de tensões e, assim, aumentando artificialmente a resistência do concreto.

Há um princípio, estabelecido por Saint Venant, indicando que o tipo de uma ação (concentrada ou parcialmente distribuída) só é sentido em seções cuja distância da seção de aplicação seja, no máximo, igual à menor dimensão desta última. Ou seja, há impedimento à deformação junto às faces extremas do corpo de prova, e este efeito é sentido até a altura de um diâmetro do corpo de prova a partir de cada face, ou seja, neste caso, praticamente em todo o corpo de prova (com altura de 30 cm e diâmetro de 15 cm); em um pilar, por exemplo, este fenômeno não acontece em seções na região intermediária, que são distantes das extremidades. Por essa razão, a resistência do corpo de prova à compressão obtida em ensaios não representa fielmente a resistência do concreto de estruturas reais (esta é a parcela  $\gamma_{m2}$  indicada no capítulo 1 em 1.8.2.5).

O segundo motivo é que o concreto tem uma resistência maior para cargas aplicadas rapidamente, o que ocorre com os ensaios para a determinação da resistência à compressão, e as peças de concreto, na prática, estão submetidas a cargas permanentes que atuam durante toda a vida da estrutura. Se um corpo de prova for submetido a um carre-

gamento permanente, obtém-se o gráfico da resistência em função do tempo semelhante ao da Figura 3.6. O gráfico mostra que, à medida que o tempo aumenta, a resistência à compressão do corpo de prova, sob carga permanente, diminui (efeito Rüsçh). Esta última afirmação não está em desacordo com o que foi dito no capítulo 1 (a resistência do concreto aumenta com o tempo), pois aqui há a condição “sob carga permanente”.

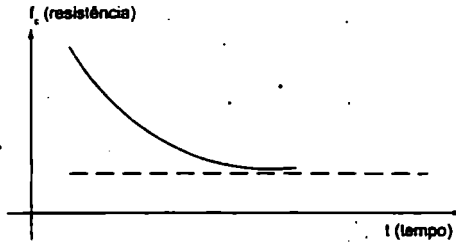


Figura 3.6 Curva típica da resistência de um corpo de prova sob carregamento permanente.

O terceiro motivo, como já destacado, é que a resistência do concreto aumenta com a idade (sem considerar a fluência quando sob carga constante). Esta parcela de crescimento da resistência do concreto também é considerada no fator 1,4, e é por este motivo que o valor de  $\beta_1$ , dado no capítulo 1 pela expressão 1.23, não pode ser usado para idade maior que 28 dias. Segundo Fusco,<sup>15</sup> no caso de concretos de classes até C50, o coeficiente 0,85 é obtido por:  $0,85 = 0,95 \cdot 0,75 \cdot 1,2$ . A primeira parcela 0,95 é devida ao fato de a resistência ser obtida com ensaios de corpos de prova; a segunda, 0,75, considera o efeito Rusch e a terceira, 1,2, leva em conta o ganho de resistência dos concretos após os 28 dias de idade:

### 3.5 DEFINIÇÕES E NOMENCLATURA

Antes de apresentar toda a teoria que possibilita o dimensionamento das peças de concreto armado, é conveniente repetir as principais definições e nomenclatura das grandezas envolvidas no cálculo, empregadas pela ABNT NBR 6118: 2014 e pela maioria das normas internacionais.

- d – **Altura útil:** distância do centro de gravidade da armadura longitudinal tracionada até a fibra mais comprimida de concreto.
- d' – **Distância** entre o centro de gravidade da armadura longitudinal comprimida e a face mais próxima do elemento estrutural (fibra mais comprimida de concreto).

<sup>15</sup> Fusco (1995).

- $M_{sd}$  – **Momento fletor solicitante de cálculo na seção** (na continuação será chamado apenas de  $M_d$ ): no dimensionamento, quando há um só tipo de carga acidental, é obtido multiplicando o momento em serviço (atuante) pelo coeficiente de ponderação  $\gamma_r$ . No caso geral, usa-se a expressão 1.30.
- $M_{Rd}$  – **Momento fletor resistente de cálculo** (calculado com  $f_{cd}$  e  $f_{yd}$ ): máximo momento fletor a que a seção pode resistir (deve-se ter sempre  $M_{sd} \leq M_{Rd}$ ).
- $b_w$  – **Largura da seção transversal de vigas de seção retangular ou da nervura** (parte mais estreita da seção transversal), chamada de alma, das vigas de seção em forma de T.
- $h$  – **Altura total da seção transversal de uma peça.**
- $z$  – **Braço de alavanca:** distância entre o ponto de aplicação da resultante das tensões normais de compressão no concreto e da resultante das tensões normais de tração no aço (distância entre o centro de gravidade da armadura de tração e o centro de gravidade da região comprimida de concreto).
- $x$  – **Altura (profundidade) da linha neutra:** distância da borda mais comprimida do concreto ao ponto que tem deformação e tensão nulas (distância da linha neutra ao ponto de maior encurtamento da seção transversal de uma peça fletida).
- $y$  – **Altura da linha neutra convencional:** altura do diagrama retangular de tensões de compressão no concreto, na seção transversal de peças fletidas; é uma idealização que simplifica o equacionamento do problema e conduz a resultados próximos daqueles que seriam obtidos com o diagrama parábola-retângulo ( $y = 0,8 \cdot x$ , Figura 3.4).

### 3.6 DOMÍNIOS DE DEFORMAÇÃO NA SEÇÃO TRANSVERSAL

Conforme já apontado, a ruína da seção transversal para qualquer tipo de flexão no estado limite último é caracterizada pelas deformações específicas de cálculo do concreto e do aço, que atingem (uma delas ou ambas) os valores últimos (máximos) das deformações específicas desses materiais.

Os conjuntos de deformações específicas do concreto e do aço ao longo de uma seção transversal retangular com armadura simples (só tracionada) submetida a ações normais definem seis domínios de deformação, esquematizados na Figura 3.7, para concretos até a classe C50; a Figura 3.8 é genérica, e serve para os concretos de todas as classes. Os domínios representam as diversas possibilidades de ruína da seção; a cada par de deformações específicas de cálculo  $\epsilon_c$  e  $\epsilon_s$ , correspondem um esforço normal, se houver, e um momento fletor atuantes na seção.

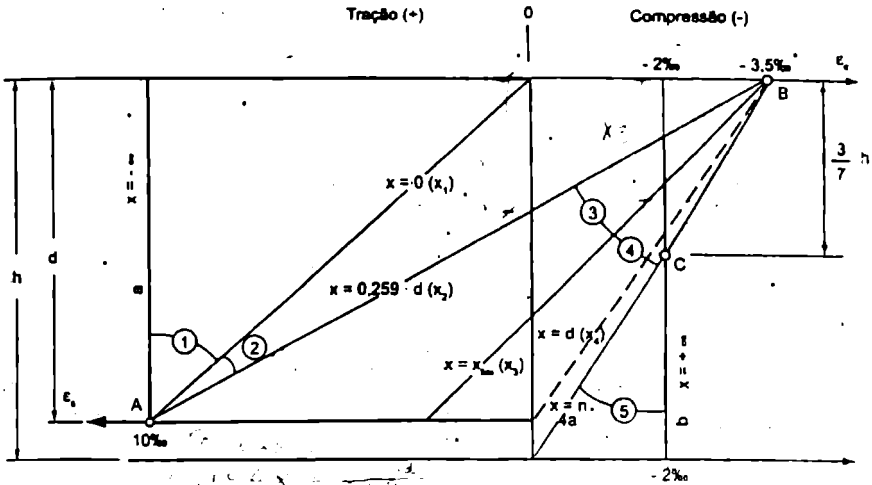


Figura 3.7 Domínios de deformação no estado limite último em uma seção transversal para concretos até C50 – adaptada da Figura 17.1 da ABNT NBR 6118:2014.

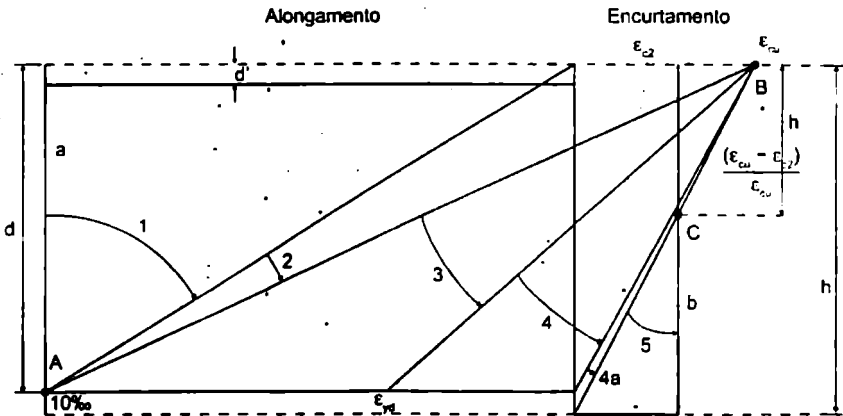


Figura 3.8 Domínios de deformação no estado limite último em uma seção transversal para concretos de todas as classes – adaptada da Figura 17.1 da ABNT NBR 6118:2014.

Para a determinação da resistência de cálculo de uma dada seção transversal, é preciso saber em qual domínio está situado o diagrama de deformações específicas de cálculo dos materiais (aço e concreto). As explicações sobre os domínios referem-se apenas aos concretos de classes até C50. Para as demais classes pode ser usado raciocínio similar, porém com os limites das resistências e deformações específicas referentes ao concreto correspondente. Como a ABNT NBR 6118:2014 limita a relação  $x/d$  a valores menores que os aqui apresentados, que são referentes ao limite de escoamento

dos aços, alguns trechos dos domínios não mais se aplicam. Cabe destacar, entretanto, que a Figura 3.6, que indica os domínios, não foi alterada nesta versão da norma.

A reta "a" e os domínios 1 e 2 correspondem ao estado limite último por deformação plástica excessiva (aço com alongamento máximo); os domínios 3, 4, 4a, 5 e reta "b" correspondem ao estado limite último por ruptura convencional (ruptura do concreto por encurtamento limite).

### a) Domínio 1 (Figura 3.9) – tração não uniforme, sem compressão:

- Início:  $\epsilon_s = 10\%$  e  $\epsilon_c = 10\%$ ;  $x = -\infty \rightarrow$  reta "a"  $\rightarrow$  tração uniforme.
- Término:  $\epsilon_s = 10\%$  e  $\epsilon_c = 0$ ;  $x_1 = 0$ .
- Estado limite último caracterizado pela deformação  $\epsilon_s = 10\%$ .
- A reta de deformação gira em torno do ponto A ( $\epsilon_s = 10\%$ ).
- A linha neutra é externa à seção transversal.
- A seção resistente é composta do aço, não havendo participação do concreto, que se encontra totalmente tracionado, e, portanto, fissurado.
- Tração simples (a resultante das tensões atua no centro de gravidade da armadura – todas as fibras têm a mesma deformação de tração – uniforme, reta a) ou tração composta (tração excêntrica – não uniforme – as deformações de tração são diferentes em cada fibra) em toda a seção.

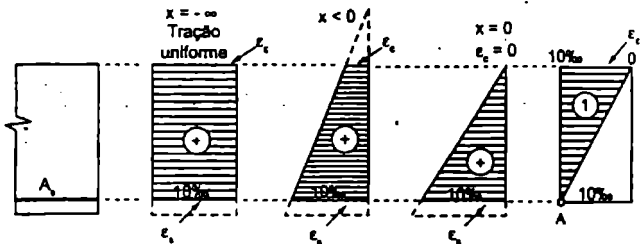


Figura 3.9 Situações inicial, intermediária e final que ocorrem no domínio 1. No último esquema, mostra-se que as seções após a deformação, no domínio 1, são obtidas a partir do giro em torno ponto A.

### b) Domínio 2 (Figura 3.10) – flexão simples ou composta:

- Início:  $\epsilon_s = 10\%$  e  $\epsilon_c = 0$ ;  $x_1 = 0$ .
- Término:  $\epsilon_s = 10\%$  e  $\epsilon_c = 3,5\%$ ;  $x = x_2 = 0,259 \cdot d$ .
- Estado limite último caracterizado pela deformação  $\epsilon_s = 10\%$  (grandes deformações).
- O concreto não alcança a ruptura ( $\epsilon_c < 3,5\%$ ).
- A reta de deformação continua girando em torno do ponto A ( $\epsilon_s = 10\%$ ).
- A linha neutra corta a seção transversal (tração e compressão).

- A seção resistente é composta do aço tracionado e do concreto comprimido.

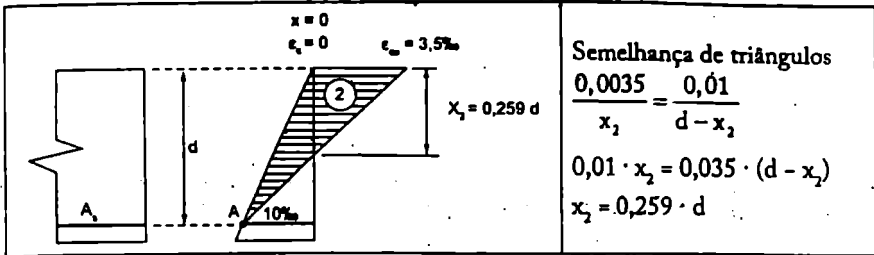


Figura 3.10 Características do domínio 2.

c) Domínio 3 (Figura 3.11) – flexão simples (seção subarmada) ou composta (parte deste domínio não pode ser usada em razão do limite imposto para a relação  $x/d$ ):

- Início:  $\epsilon_s = 10\text{‰}$  e  $\epsilon_c = 3,5\text{‰}$ :  $x = x_2 = 0,259 \cdot d$ .
- Término:  $\epsilon_s = \epsilon_{yd}$  (deformação específica de escoamento do aço) e  $\epsilon_c = 3,5\text{‰}$ :  $x = x_3$ .
- Estado limite último caracterizado por  $\epsilon_c = 3,5\text{‰}$  (deformação de ruptura do concreto).
- A reta de deformação gira em torno do ponto B ( $\epsilon_c = 3,5\text{‰}$ ).
- A linha neutra corta a seção transversal (tração e compressão): na fronteira entre os domínios 3 e 4, sua altura ( $x = x_3$ ) é variável com o tipo de aço.
- A seção resistente é composta do aço tracionado e do concreto comprimido.
- A ruptura do concreto ocorre simultaneamente com o escoamento da armadura: situação ideal, pois os dois materiais atingem sua capacidade resistente máxima (são aproveitados integralmente).
- A ruína acontece com aviso (grandes deformações).
- As peças que chegam ao estado limite último no domínio 3 são chamadas de “subarmadas” (ou normalmente armadas na fronteira entre os domínios 3 e 4).

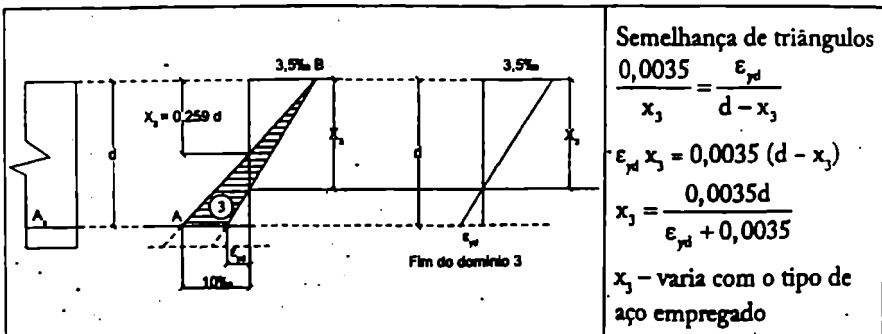


Figura 3.11 Características do domínio 3.

d) **Domínio 4 (Figura 3.12) – flexão simples (seção superarmada) ou composta** (devido às novas recomendações para o limite de  $x/d$ , este trecho não mais se aplica à flexão):

- Início:  $\epsilon_s = \epsilon_{sd}$  e  $\epsilon_c = 3,5\%$ :  $x = x_3$ .
- Término:  $\epsilon_s = 0$  e  $\epsilon_c = 3,5\%$ :  $x = x_4 = d$ .
- Estado limite último caracterizado por  $\epsilon_c = 3,5\%$  (deformação de ruptura do concreto).
- A reta de deformação continua girando em torno do ponto B ( $\epsilon_c = 3,5\%$ ).
- A linha neutra corta a seção transversal (tração e compressão).
- No estado limite último, a deformação da armadura é inferior a  $\epsilon_{sd}$  (não atinge a tensão de escoamento).
- A seção resistente é composta do aço tracionado e do concreto comprimido.
- A ruptura é frágil, sem aviso, pois o concreto se rompe sem que a armadura atinja sua deformação de escoamento (não há grandes deformações do aço nem fissuração do concreto que sirvam de advertência).
- As peças que chegam ao estado limite último no domínio 4 são chamadas de “superarmadas” e são antieconômicas, pois o aço não é utilizado com toda a sua capacidade resistente, devendo, assim, se possível, ser evitadas.

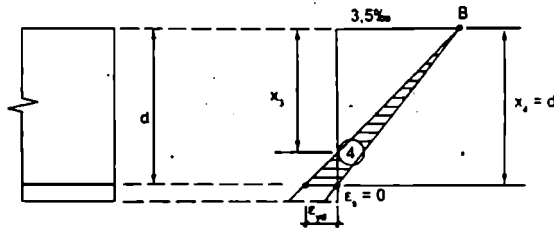


Figura 3.12 Características do domínio 4.

e) **Domínio 4a (Figura 3.13) – flexão composta com armaduras comprimidas:**

- Início:  $\epsilon_s = 0$  e  $\epsilon_c = 3,5\%$ :  $x = x_4 = d$ .
- Término:  $\epsilon_s < 0$  (compressão) e  $\epsilon_c = 3,5\%$ :  $x = x_{4a} = h$ .
- Estado limite último caracterizado por  $\epsilon_c = 3,5\%$  (deformação de ruptura do concreto).
- A reta de deformação continua girando em torno do ponto B ( $\epsilon_c = 3,5\%$ ).
- A linha neutra corta a seção transversal na região de cobrimento da armadura menos comprimida.
- A seção resistente é composta do aço e do concreto comprimidos.
- Armaduras comprimidas e pequena zona de concreto tracionado.

- A ruptura é frágil, sem aviso, pois o concreto se rompe com encurtamento da armadura (não há fissuração nem deformação que sirvam de advertência).

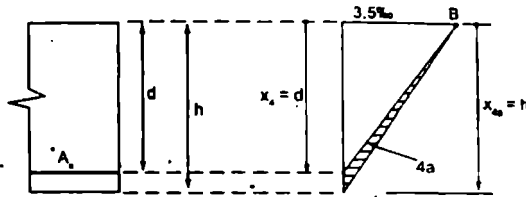


Figura 3.13 Características do domínio 4a.

**f) Domínio 5 (Figura 3.14) – compressão não uniforme, sem tração:**

- Início:  $\epsilon_s < 0$  e  $\epsilon_c = 3,5\text{‰}$ :  $x = x_{4a} = h$ .
- Término:  $\epsilon_s = 2,0\text{‰}$  (compressão),  $\epsilon_c = 2,0\text{‰}$ :  $x = x_c = +\infty \rightarrow$  reta "b"  $\rightarrow$  compressão uniforme.
- Estado limite último caracterizado por  $\epsilon_c = 3,5\text{‰}$  (na flexocompressão) a  $\epsilon_c = 2,0\text{‰}$  (na compressão uniforme).
- A reta de deformação gira em torno do ponto C, distante  $(3/7)h$  da borda mais comprimida.
- A linha neutra não corta a seção transversal, que está inteiramente comprimida.
- A seção resistente é composta do aço e do concreto comprimidos.
- Compressão simples (uniforme, na reta b) ou composta (excêntrica).
- A ruptura é frágil, sem aviso, pois o concreto se rompe com encurtamento da armadura (não há fissuração nem deformação que sirvam de advertência).

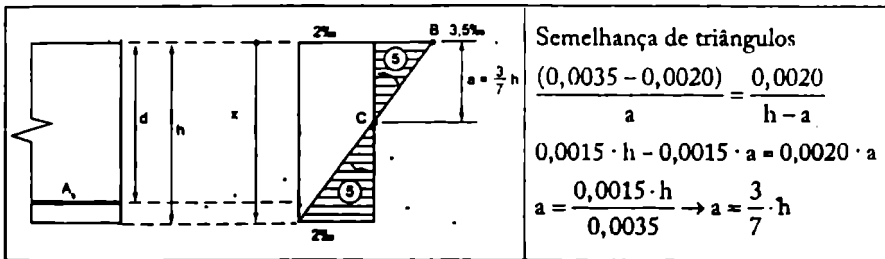


Figura 3.14 Características do domínio 5.

**Observação:** embora nas figuras 3.7 a 3.14 tenha sido considerada seção transversal retangular, os domínios se aplicam a qualquer seção e disposição da armadura, e também a situações de flexão oblíqua.

### 3.7 CÁLCULO DA ARMADURA LONGITUDINAL EM VIGAS SOB FLEXÃO NORMAL

O cálculo da quantidade de armadura longitudinal, para seções transversais retangulares, conhecidos a resistência do concreto ( $f_{ck}$ ), a largura da seção ( $b_w$ ), a altura útil ( $d$ ) e o tipo de aço ( $f_{yd}$  e  $\epsilon_{yd}$ ), é feito, de maneira simples, a partir do equilíbrio das forças atuantes na seção. Normalmente seria estudada a flexão normal pura e simples, representada pelos domínios 2, 3, 4 e 4a, porém o item 14.6.4.3 da ABNT NBR 6118:2014 permite o uso de apenas parte do domínio 3, eliminando portanto parte do domínio 3 e os domínios 4 e 4a como se depreende do texto da norma: "A capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da linha neutra no ELU. Quanto menor for  $x/d$ , tanto maior será essa capacidade. Para proporcionar o adequado comportamento dúctil em vigas e lajes, a posição da linha neutra no ELU deve obedecer aos seguintes limites:

$$a) \quad x/d \leq 0,45 \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (3.13)$$

$$b) \quad x/d \leq 0,35 \text{ para concretos com } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \quad (3.14)$$

Esses limites podem ser alterados se forem utilizados detalhes especiais de armaduras, como, por exemplo, os que produzem confinamento nessas regiões".

#### 3.7.1 EQUACIONAMENTO PARA CONCRETOS DE CLASSE ATÉ C50

Antes de efetuar a dedução das equações para o dimensionamento para seções sob flexão simples, é conveniente indicar as possibilidades de comportamento das seções quanto à ductilidade. Na Figura 3.15 é indicada a situação de seção retangular, submetida à flexão simples, com as deformações possíveis, para concretos de classe até C50, sem considerar a ductilidade ( $x/d$  depende da deformação específica de cálculo -  $\epsilon_{yd}$  - do aço). A Figura 3.16 representa a mesma situação, mas no diagrama de deformações possíveis  $\epsilon_{yd}$  foi substituído por  $\epsilon_{lim}$ , que corresponde ao valor de  $x/d = 0,45$  imposta pela ABNT NBR 6118:2014 para aumentar a ductilidade do elemento. A Figura 3.17 também representa situação de elemento de seção retangular sob flexão simples, mas com diagramas de deformações e tensões para todas as classes de concreto; os valores de  $\epsilon_{lim}$ ,  $\epsilon_{cs}$ ,  $\alpha$  e  $\lambda$  devem ser empregados em função da classe do concreto e das condições de ductilidade.

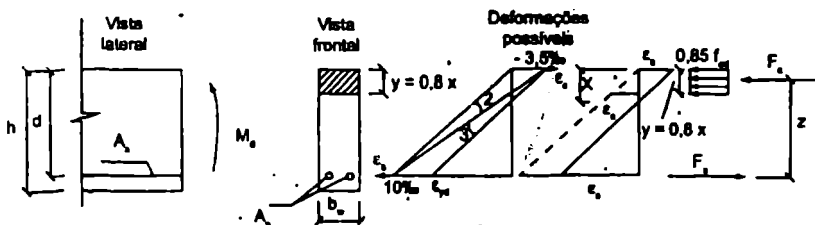


Figura 3.15 Elemento de seção retangular e diagramas de deformações e tensões na seção solicitada para flexão simples para concretos até C50, sem considerar a ductilidade.

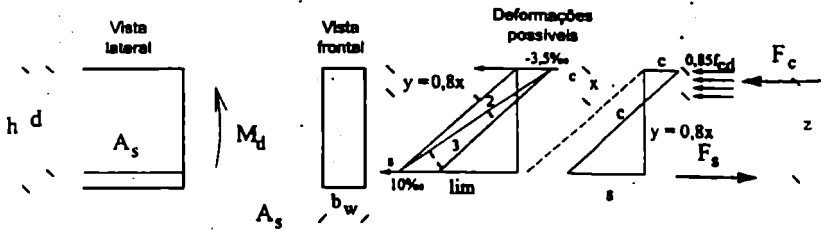


Figura 3.16 Mesma situação da Figura 3.15, com  $\epsilon_{sm}$  correspondente ao valor de  $x/d = 0,45$  imposta pela ABNT NBR 6118:2014 (aumento da ductilidade).

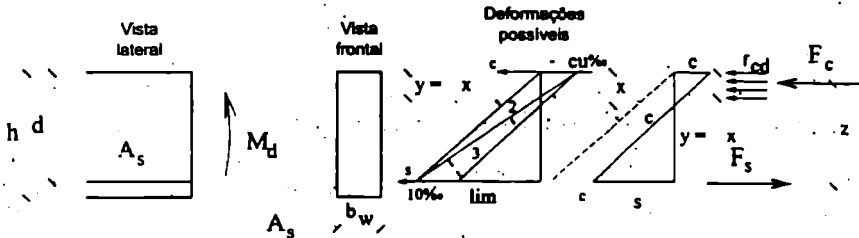


Figura 3.17 Mesma situação da Figura 3.16, mas para todas as classes de concreto.

Serão agora deduzidas as expressões para o dimensionamento de elementos de seção retangular para concretos até C50; para adequar as equações para as demais classes, basta acrescentar os parâmetros da classe desejada. Seja então o seguinte problema: conhecidos  $f_{ct}$ ,  $b_w$ ,  $d$ , tipo de aço ( $f_{yd}$  e  $\epsilon_{yd}$ ) e o momento de cálculo  $M_d$  ( $M_d = 1,4 \cdot M$ ), determinar a área da armadura longitudinal necessária ( $A_s$ ) para que um elemento de concreto armado de seção transversal retangular resista a esse momento.

#### a) Equilíbrio da seção (Figura 3.13)

- **Equilíbrio das forças atuantes normais à seção transversal:** como não há força externa, a força atuante no concreto ( $F_c$ ) deve ser igual à força atuante na armadura ( $F_s$ ):

$$\sum F = 0 \rightarrow F_s - F_c = 0 \rightarrow F_s = F_c \quad (3.15)$$

- **Equilíbrio dos momentos:** o momento das forças internas em relação a qualquer ponto (no caso, em relação ao C.G. da armadura) deve ser igual ao momento externo de cálculo:

$$\sum M = M_d \rightarrow M_d = F_c \cdot z \quad (3.16)$$

Das equações 3.15 e 3.16:

$$M_d = F_c \cdot z \quad (3.17)$$

### b) Posição da linha neutra (x)

Conhecendo a posição da linha neutra, é possível saber o domínio em que a peça está trabalhando e calcular a resultante das tensões de compressão no concreto ( $F_c$ ) e o braço de alavanca ( $z$ ).

$$F_c = (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) \cdot (0,8 \cdot x) \quad (3.18)$$

$$z = d - 0,4 \cdot x \quad (3.19)$$

Colocando  $F_c$  e  $z$  na equação 3.16, tem-se:

$$M_d = F_c \cdot z = (0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot 0,8 \cdot x) \cdot (d - 0,4 \cdot x) = b_w \cdot f_{cd} \cdot 0,68 \cdot x \cdot (d - 0,4 \cdot x) \quad (3.20)$$

ou ainda

$$M_d = (0,68 \cdot x \cdot d - 0,272 \cdot x^2) \cdot b_w \cdot f_{cd} \quad (3.21)$$

Resolvendo a equação 3.21, obtém-se  $x$ , o qual define a posição da linha neutra, que é fundamental para a solução do problema proposto. Nota-se que a variação de  $x$  não é linear com o esforço solicitante  $M_d$ , mas segue um polinômio do segundo grau.

$$x = \frac{0,68 \cdot d \pm \sqrt{(0,68d)^2 - 4 \cdot 0,272 \cdot \left(\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd}}\right)}}{0,544} \quad (3.22)$$

### c) Cálculo da área necessária de armadura ( $A_s$ )

Com o valor de  $x$  determinado acima, é possível encontrar  $A_s$ . A força na armadura ( $F_s$ ) vem do produto da área de aço ( $A_s$ ) pela tensão atuante no aço ( $f_s$ ). Da equação (3.17) tem-se  $M_d/z = F_s = f_s \cdot A_s$ , resultando:

$$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_s} \quad (3.23)$$

Admitindo que a peça esteja trabalhando nos domínios 2 ou 3, para um melhor aproveitamento da armadura, tem-se  $\epsilon_s \geq \epsilon_{ps}$ , resultando para tensão na armadura a de escoamento ( $f_s = f_{ps}$ ); caso contrário, tira-se o valor de  $\epsilon_s$  do diagrama de tensão  $\times$  deformação do aço e calcula-se  $f_s$ , mas a peça trabalharia no domínio 4, o que não é possível. A equação (3.23) fica:

$$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_{yd}} \quad (3.24)$$

**d) Verificação do domínio em que a peça atingirá o estado limite último**

Obtido o valor de  $x$  que define a posição (profundidade) da linha neutra, é possível verificar em que domínio a peça atingirá o estado limite último. Na flexão simples, que está sendo considerada, os domínios possíveis são o 2, o 3 e o 4. No início do domínio 2 tem-se  $\epsilon_c = 0$ , e no final do domínio 4 tem-se  $\epsilon_s = 0$ , que são as piores situações que podem ocorrer (um dos dois materiais não contribui na resistência). O melhor é que a peça trabalhe no domínio 3; o domínio 2 é aceitável, e o domínio 4 deve ser evitado. Cabe então a pergunta: conhecido o momento e as demais variáveis necessárias para resolver o problema, como saber se a seção está trabalhando no domínio 3 e se a armadura já atingiu a deformação de escoamento? É possível saber por meio da relação entre as deformações e a posição da linha neutra.

- **Relação entre deformações:** como as seções permanecem planas após a deformação, por semelhança dos triângulos ABC e ADE do diagrama de deformações (Figura 3.18), é possível obter a relação entre a posição da linha neutra ( $x$ ) e a altura útil ( $d$ ):

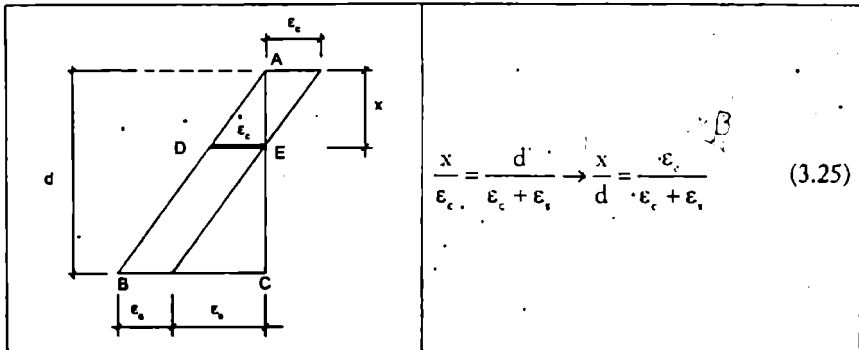


Figura 3.18 Relação entre a posição da linha neutra e a altura útil.

- **Posição da linha neutra:** no limite do domínio 2 e em todo o 3, a deformação específica do concreto é  $\epsilon_c = 3,5\%$  (0,0035); colocando esse valor na equação 3.25, resulta:

$$\frac{x}{d} = \frac{0,0035}{0,0035 + \epsilon_s} \quad (3.26)$$

Conclui-se que, para uma seção conhecida, a posição da linha neutra, no domínio 3, depende apenas da deformação específica do aço, e o limite entre os domínios 3 e

4 depende do tipo de aço, caracterizado pela deformação específica de escoamento de cálculo do aço ( $\epsilon_{yd}$ ). Com as novas especificações da norma, não será mais possível usar os valores do domínio 3 que sejam superiores a  $x = 0,45d$ . Desta forma, não cabe mais o estudo do limite entre o domínio 3 e 4. Apenas como ilustração, apresenta-se a determinação dos limites entre os domínios, esquematizados na Figura 3.8, para os aços CA25 e CA50.

**Aço CA25 ( $\epsilon_{yd} = 1,04\%$ , no limite entre os domínios 3 e 4):**

$$\frac{x_{34}}{d} = \frac{0,0035}{0,0035 + 0,00104} = 0,7709$$

$x_{34} = 0,7709 d$  (limite entre os domínios 3 e 4);

$x_{23} = 0,259 d$  (limite entre os domínios 2 e 3);

para  $x < 0,259 \cdot d \Rightarrow$  domínio 2;

para  $0,259 \cdot d < x < 0,7709 \cdot d \Rightarrow$  domínio 3.

**Aço CA50 ( $\epsilon_{yd} = 2,07\%$ , no limite entre os domínios 3 e 4)**

$$\frac{x_{34}}{d} = \frac{0,0035}{0,0035 + 0,00207} = 0,6283$$

$x_{34} = 0,6283 \cdot d$  (limite entre os domínios 3 e 4);

$x_{23} = 0,259 \cdot d$  (limite entre os domínios 2 e 3);

para  $x < 0,259 \cdot d \Rightarrow$  domínio 2;

para  $0,259 \cdot d < x < 0,6283 \cdot d \Rightarrow$  domínio 3.

Agora é possível resolver os diversos problemas, lembrando que a fronteira entre os domínios 2 e 3 é dada pelo par de valores  $\epsilon_c = 3,5\%$  e  $\epsilon_s = 10\%$  ( $x = 0,259 \cdot d$ ), e que só é possível utilizar o domínio 3 até o limite de  $x/d = 0,45$ . O limite entre os domínios 3 e 4 (Figura 3.8), embora não seja mais utilizado, é dado por  $\epsilon_c = 3,5\%$  e  $\epsilon_s = \epsilon_{yd}$  ( $x$  é função do tipo de aço); os valores de  $(x/d)$  referentes aos demais tipos de aço estão no Quadro 1.2 do capítulo 1.

### EXEMPLO 1

Para uma seção retangular de concreto armado com  $b_w = 0,12$  m e  $d = 0,29$  m sob a ação de um momento fletor  $M = 12,2$  kNm ( $M_d = 1,4 \cdot M = 1,4 \cdot 12,2 = 17,08$  kNm), determinar a quantidade de armadura longitudinal necessária ( $A_s$ ). Dados:  $f_{cd} = 20$  MPa (20.000 kN/m<sup>2</sup>); aço CA50 ( $f_{yd} = f_{yk}/1,15 = 500/1,15 = 434,78$  MPa = 43,478 kN/cm<sup>2</sup>).

a) Colocando na equação 3.21 os valores conhecidos, determina-se  $x$ :

$$\frac{M_d}{1,4} = (0,68 \cdot x \cdot d - 0,272 \cdot x^2) \cdot b_w \cdot f_{cd} \Rightarrow 17,08 = (0,68 \cdot x \cdot 0,29 - 0,272 \cdot x^2) \cdot 0,12 \cdot 20000$$

$$x = \frac{0,68 \cdot 0,29 \pm \sqrt{(0,68 \cdot 0,29)^2 - 4 \cdot 0,272 \cdot \left( \frac{17,08}{0,12 \cdot 20000 / 1,4} \right)}}{0,544}$$

resultando  $x_1 = 0,6705$  m e  $x_2 = 0,0545$  m.

A primeira solução,  $x = 0,6705$  m, indica que a linha neutra passa fora da seção transversal, não atendendo ao caso de flexão simples; assim, o valor correto é  $x = 0,0545$  m.

b) Verificação do domínio:

No limite entre os domínios 2 e 3 ( $\epsilon_c = 3,5\%$ ,  $\epsilon_s = 10\%$ ), a posição da linha neutra é  $x = 0,259 \cdot d = 0,259 \cdot 0,29 = 0,0751$  m, maior que o valor encontrado para  $x$  na equação 3.7, indicando que o problema ocorre no domínio 2 e, portanto, de fato, o aço já escoou e  $f_s = f_{yd} = 50/1,15 = 43,478$  kN/cm<sup>2</sup>.

c) Cálculo do valor do braço de alavanca  $z$ :

Com  $x = 0,0545$  m na equação 3.5, resulta:

$$z = d - 0,4 \cdot x = 0,29 - 0,4 \cdot 0,0545 = 0,29 - 0,022 = 0,27 \text{ m}$$

d) Cálculo de  $A_s$ :

Com os valores de  $M_d = 17,08$  kNm,  $z = 0,27$  m e  $f_{yd} = 43,478$  kN/cm<sup>2</sup> na equação 3.24, tem-se  $A_s$ :

$$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_{yd}} = \frac{17,08}{0,27 \cdot 43,478} = \frac{17,08}{11,74} \Rightarrow A_s = 1,46 \text{ cm}^2$$

### 3.7.2 EQUACIONAMENTO PARA CONCRETOS DE QUALQUER CLASSE

Em princípio, o equacionamento para o cálculo da armadura longitudinal é feito da mesma forma que no caso anterior; apenas aparecerão os termos  $\alpha_c$  e  $\lambda$ . A seguir, são mostradas as equações, sendo algumas as mesmas do item anterior e outras similares.

$$F_c = F_c \quad (3.27)$$

$$M_d = F_c \cdot z \quad (3.28)$$

$$M_d = F_s \cdot z \quad (3.29)$$

$$F_c = (\alpha_c \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) \cdot (\lambda \cdot x) \quad (3.30)$$

$$z = d - 0,5 \cdot \lambda \cdot x \quad (3.31)$$

$$M_d = b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot x \cdot (d - 0,5 \cdot \lambda \cdot x) \quad (3.32)$$

$$M_d = (\lambda \cdot x \cdot d - 0,5 \cdot \lambda^2 \cdot x^2) \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \quad (3.33)$$

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2 \cdot \left( \frac{M_d}{b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}} \right)}}{\lambda} \quad (3.34)$$

$$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_{yd}} \quad (3.35)$$

$$\frac{x}{d} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} \quad (3.36)$$

### EXEMPLO 2 (É O EXEMPLO 1 COM RESISTÊNCIA CARACTERÍSTICA DO CONCRETO $f_{ck} = 90$ MPa)

Para uma seção retangular de concreto armado com  $b_w = 0,12$  m e  $d = 0,29$  m sob a ação de um momento fletor  $M = 12,2$  kNm ( $M_d = 1,4 \cdot M = 1,4 \cdot 12,2 = 17,08$  kNm), determinar a quantidade de armadura longitudinal necessária ( $A_s$ ). Dados:  $f_{ck} = 90$  MPa (90.000 kN/m<sup>2</sup>); aço CA50 ( $f_{yk} = f_{yk}/1,15 = 500/1,15 = 434,78$  MPa = 43,478 kN/cm<sup>2</sup>).

a) Cálculo de  $\lambda$  e  $\alpha_c$  (expressões 3.8 e 3.12):

$$\lambda = 0,8 - (f_{ck} - 50)/400 = 0,8 - (90 - 50)/400 = 0,7$$

$$\alpha_c = 0,85 \cdot [1,0 - (f_{ck} - 50)/200] = 0,85 \cdot [1,0 - (90 - 50)/200] = 0,68$$

b) Com os valores conhecidos na equação 3.34, determina-se  $x$ :

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2 \cdot \left( \frac{M_d}{b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}} \right)}}{\lambda} = \frac{0,29 \pm \sqrt{0,29^2 - 2 \cdot \left( \frac{17,08}{0,12 \cdot 0,68 \cdot 90000 / 1,4} \right)}}{0,7}$$

resultando  $x_1 = 0,812$  m e  $x_2 = 0,0164$  m

A primeira solução,  $x = 0,812$  m, indica que a linha neutra passa fora da seção transversal, não atendendo ao caso de flexão simples; assim, o valor correto é  $x = 0,0164$  m.

c) Verificação do domínio:

No limite entre os domínios 2 e 3 ( $\epsilon_c = 3,5\%$ ,  $\epsilon_s = 10\%$ ), a posição da linha neutra é  $x = 0,259 \cdot d = 0,259 \cdot 0,29 = 0,0751$  m, maior que o valor encontrado para  $x$  na equação 3.34, indicando que o problema ocorre no domínio 2 e, portanto, de fato, o aço já escoou e  $f_s = f_{sd} = 50/1,15 = 43,478$  kN/cm<sup>2</sup>.

d) Cálculo do valor do braço de alavança  $z$ :

Com  $x = 0,0164$  m na equação 3.31, resulta:

$$z = d - 0,5 \cdot \lambda \cdot x$$

$$z = d - 0,5 \cdot \lambda \cdot x = 0,29 - 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,0164 = 0,29 - 0,0057 = 0,284 \text{ m}$$

e) Cálculo de  $A_s$ :

Com os valores de  $M_d = 17,08$  kNm,  $z = 0,284$  m e  $f_{sd} = 43,478$  kN/cm<sup>2</sup> na equação 3.24 ou 3.36, tem-se  $A_s$ :

$$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_{sd}} = \frac{17,08}{0,284 \cdot 43,478} = \frac{17,08}{12,34} \Rightarrow A_s = 1,39 \text{ cm}^2$$

Verifica-se que o elevado aumento na resistência característica à compressão do concreto resultou em uma insignificante redução da área da armadura necessária.

### 3.7.3 CÁLCULO DO MÁXIMO MOMENTO RESISTENTE DA SEÇÃO

No caso anterior, conhecia-se  $M_d$  e calculava-se  $A_s$ . Seja agora um problema diferente: conhecidas as dimensões da seção transversal ( $b_w$  e  $d$ ), o tipo de aço ( $f_{sd}$  e  $\epsilon_{sd}$ ) e a resistência do concreto ( $f_{cd}$ ), em qual domínio se consegue o maior momento resistente, ou seja, qual o maior momento que a seção dada consegue resistir?

O problema pode ser resolvido derivando-se a expressão 3.21 em relação à altura da linha neutra ( $x$ ) e igualando-a a zero; dessa forma, encontra-se o ponto extremo da função:

$$M_d = (0,68 \cdot x \cdot d - 0,272 \cdot x^2) \cdot b_w \cdot f_{cd}$$

$$\frac{d(M_d)}{dx} = (0,68 \cdot d - 0,54 \cdot x) \cdot b_w \cdot f_{cd} = 0 \Rightarrow x = 1,25 \cdot d$$

O resultado  $x = 1,25 \cdot d$  (linha neutra fora da seção) não é solução, pois para haver flexão simples é necessária a existência de resultantes normais de compressão (concreto) e tração (aço) que se anulem (equilíbrio); isso só é possível nos domínios 2 e 3, em que a linha neutra corta a seção (no domínio 4, isso também ocorre, mas não é permitido o seu uso). Como a equação 3.33 é uma função contínua e crescente, o valor do maior momento será alcançado quando  $x$  for o maior possível, mas limitado pelo

não emprego do domínio 4, também evitado por questões econômicas (maior consumo de materiais).

Assim, antes da imposição da ductilidade mínima pela norma, o máximo momento resistente era determinado para  $\epsilon_s = \epsilon_{yd}$  e  $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$  (limite entre os domínios 3 e 4). Na situação agora exigida, o momento máximo, para concretos até a classe C50, é obtido quando  $x/d = 0,45$  (ABNT NBR 6118:2014, item 14.6.4.3).

### EXEMPLO 3

Para uma viga de seção retangular de concreto armado, com largura  $b_w = 12$  cm e altura útil  $d = 17,65$  cm, determinar o momento resistente da seção e o valor da área de aço necessária correspondente a esse momento. Considerar  $f_{cd} = 20$  MPa (20000 kN/m<sup>2</sup>) e aço CA50. Apenas para efeito de comparação, os cálculos serão feitos para o limite entre os domínios 3 e 4 e para a relação  $x/d = 0,45$ ; pois:

a) Cálculo para o limite entre os domínios 3 e 4:

- Momento resistente:

O limite entre os domínios 3 e 4 para o CA50 que tem  $\epsilon_{yd} = 0,00207$  é:

$$x_{34} = \frac{0,0035}{0,0035 + \epsilon_{yd}} \cdot d = \frac{0,0035}{0,0035 + 0,00207} \cdot 0,1765 = 0,6283 \cdot 0,1765 = 0,1109 \text{ m}$$

Com esse valor, na equação 3.20, obtém-se  $M_d$ :

$$M_d = F_c \cdot z = (0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot 0,8 \cdot x_{34}) \cdot (d - 0,4 \cdot x_{34}) = b_w \cdot f_{cd} \cdot 0,68 \cdot x_{34} \cdot (d - 0,4 \cdot x_{34})$$

$$M_d = 0,12 \cdot \frac{20000}{1,4} \cdot 0,68 \cdot 0,1109 \cdot (0,1765 - 0,4 \cdot 0,1109) = 17,08 \text{ kNm}$$

O máximo momento que pode atuar na viga, sabendo que  $M_d = 1,4 \cdot M$ , é:

$$M = \frac{M_d}{1,4} = \frac{17,08}{1,4} = 12,20 \text{ kNm}$$

- Armadura

A armadura necessária pode ser obtida com a equação 3.24, com  $f_s = f_{yd}$ ; pois a seção trabalha no limite entre os domínios 3 e 4:

$$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_{yd}} = \frac{M_d}{(d - 0,4 \cdot x_{34}) \cdot f_{yd}} = \frac{17,08}{(0,1765 - 0,4 \cdot 0,1109) \cdot \frac{50}{1,15}} = 2,97 \text{ cm}^2$$

b) Cálculo para  $x/d = 0,45$ , pois a resistência do concreto é menor que 50 MPa:

• Momento resistente:

Colocando  $x/d = 0,45$  ( $x = 0,45 \cdot d$ ) na equação 3.20, resulta:

$$M_d = F_c \cdot z = b_w \cdot f_{cd} \cdot 0,68 \cdot x \cdot (d - 0,4 \cdot x) = b_w \cdot f_{cd} \cdot 0,68 \cdot 0,45 \cdot d \cdot (d - 0,4 \cdot 0,45 \cdot d)$$

$$M_d = 0,12 \cdot \frac{20000}{1,4} \cdot 0,68 \cdot 0,45 \cdot 0,1765 \cdot (0,1765 - 0,4 \cdot 0,45 \cdot 0,1765) = 13,40 \text{ kNm}$$

O máximo momento, em serviço, que pode atuar na viga é:

$$M = \frac{M_d}{1,4} = \frac{13,40}{1,4} = 9,57 \text{ kNm}$$

• Armadura

A armadura necessária pode ser obtida com a equação 3.24, com  $x = 0,45 \cdot d$  e  $f_t = f_{yd}$ , pois a seção trabalha no domínio 3, no qual a deformação específica do aço corresponde à resistência de escoamento de cálculo do aço:

$$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_{yd}} = \frac{M_d}{(d - 0,4 \cdot 0,45 \cdot d) \cdot f_{yd}} = \frac{13,40}{(0,1765 - 0,4 \cdot 0,45 \cdot 0,1765) \cdot \frac{50}{1,15}} = 2,13 \text{ cm}^2$$

Verifica-se que, com a redução da relação  $x/d$ , o momento resistente da viga é menor, com uma conseqüente redução da armadura necessária.

### 3.7.4. CONDIÇÕES DE DUCTILIDADE EM VIGAS E REDISTRIBUIÇÃO DE MOMENTOS

Conforme o item 17.2.3 da ABNT NBR 6118:2014, nas vigas é necessário garantir boas condições de ductilidade, respeitando os limites da posição da linha neutra ( $x/d$ ) dados no item 14.6.4.3 da norma (aqui em 3.7), sendo adotada, se necessário, armadura de compressão.

A introdução da armadura de compressão para garantir o atendimento de valores menores da posição da linha neutra ( $x$ ), que estejam nos domínios 2 ou 3, não conduz a elementos estruturais com ruptura frágil. A ruptura frágil está associada a posições da linha neutra no domínio 4, com ou sem armadura de compressão.

Ainda segundo o item 14.6.4.3 da norma, quando for efetuada uma redistribuição de momento, reduzindo-o de um valor  $M$  para  $\delta M$ , em uma determinada seção transversal, a profundidade da linha neutra nessa seção ( $x/d$ ), para o momento reduzido  $\delta M$ , deve ser limitada por:

$$a) \quad x/d \leq (\delta - 0,44)/1,25 \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (3.37)$$

$$b) \quad x/d \leq (\delta - 0,56)/1,25 \text{ para concretos com } 50 \text{ MPa} < f_{cd} \leq 90 \text{ MPa} \quad (3.38)$$

O coeficiente de redistribuição deve, ainda, obedecer ao limite  $\delta \geq 0,75$  para estruturas que não sejam de nós móveis.

### 3.7.3 CÁLCULO DO MÁXIMO MOMENTO RESISTENTE DA SEÇÃO, CONHECIDA A ARMADURA LONGITUDINAL

Esta é uma situação bastante comum na prática: conhecidas a largura ( $b_w$ ) e a altura útil ( $d$ ) de uma seção transversal retangular, a resistência do concreto à compressão ( $f_{cd}$ ), o tipo de aço ( $f_{yd}$ ) e a área da seção transversal da armadura longitudinal ( $A_s$ ), qual é o valor do momento máximo resistido? É importante notar a diferença entre a situação anterior, em que a quantidade de armadura não era inicialmente conhecida. Neste caso, considerando concretos com resistência característica à compressão menor que 50 MPa, ao fixar a quantidade da área de aço, a posição da linha neutra fica automaticamente determinada, e o valor encontrado não pode ser maior que  $x = 0,45 \cdot d$ .

A solução do problema é simples, devendo-se inicialmente considerar que a seção poderá trabalhar entre o início do domínio 2 até o limite  $x = 0,45 \cdot d$  do domínio 3. Em qualquer destes domínios, o aço tracionado estará escoando, ou seja,  $\epsilon_s \geq \epsilon_{yd}$  e  $f_s = f_{yd}$ . Nesse caso, conhecendo a área de aço ( $A_s$ ), a força ( $F_s$ ) na armadura é:

$$F_s = A_s \cdot f_{yd} \quad (3.39)$$

Com a expressão da força no concreto, que depende da posição da linha neutra, pode-se obter o valor de  $x$  a partir do fato de que, por equilíbrio, as forças resultantes no aço e no concreto devem ter a mesma intensidade. Pela equação 3.18, tem-se  $F_c$ :

$$F_c = (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) \cdot (0,8 \cdot x)$$

e, como  $F_c = F_s$ , ou seja:

$$(0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) \cdot (0,8 \cdot x) = A_s \cdot f_{yd}$$

resulta para  $x$ :

$$x = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,68 \cdot b_w \cdot f_{cd}} \quad (3.40)$$

Determinado o valor de  $x$ , é preciso verificar se ele é inferior ao limite  $x = 0,45 \cdot d$ . Caso isso ocorra, e, portanto, de fato,  $f_s = f_{yd}$ , o máximo momento resistido ( $M_d$ ) pela seção é obtido pelo produto da força na armadura (ou no concreto) pelo braço de alavanca  $z$  (equação 3.19):

$$M_d = F_y \cdot z = F_y \cdot (d - 0,4 \cdot x) = A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - 0,4 \cdot x) \quad (3.41)$$

Obtido o valor da profundidade  $x$  da linha neutra, o momento fletor resistente da seção é encontrado com a equação 3.41. É importante destacar novamente que a profundidade da altura da linha neutra deve atender ao limite  $x = 0,45 \cdot d$ . Caso isso não ocorra, deve-se aumentar a altura útil da viga ou utilizar uma armadura de compressão (viga com armadura dupla), que será vista na seção 3.7.6.

#### EXEMPLO 4

Determinar o momento resistente de uma viga de seção retangular de concreto armado, com largura  $b_w = 12$  cm e altura útil  $d = 17,65$  cm, para as seguintes situações: a)  $A_s = 0,5$  cm<sup>2</sup>; b)  $A_s = 2,0$  cm<sup>2</sup>. Dados: aço CA50;  $f_{ck} = 20$  MPa (20.000 kN/m<sup>2</sup>).

##### a) Armadura $A_s = 0,5$ cm<sup>2</sup>

- **Profundidade da linha neutra**, considerando inicialmente que a seção trabalhe nos domínios 2 ou 3 ( $f_s = f_{yd}$ ), determina-se a posição da linha neutra (equação 3.40):

$$x = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,68 \cdot b_w \cdot f_{cd}} = \frac{0,5 \cdot (50 / 1,15)}{0,68 \cdot 0,12 \cdot (20000 / 1,4)} = 0,0186 \text{ m}$$

- **Verificação da posição da linha neutra (domínio) em que a viga trabalha:**

Com os limites entre os domínios 2 e 3 ( $x_{23}$ ) e entre 3 e o limite  $x = 0,45 \cdot d$ , verifica-se a posição da linha neutra para o valor encontrado de  $x = 0,0186$  m. Os valores de  $x_{23}$  podem ser determinados com a expressão 3.25 (ou 3.26), lembrando que entre os domínios 2 e 3 o aço tem deformação específica de 1,0%; o limite  $x = 0,45 \cdot d$  ( $x_{0,45}$ ) é obtido diretamente:

$$x_{23} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} \cdot d = \frac{0,035}{0,035 + 0,1} \cdot d = 0,259 \cdot 0,1765 = 0,0457 \text{ m}$$

$$x_{0,45} = 0,45 \cdot d = 0,45 \cdot 0,1765 = 0,0794 \text{ m}$$

Como o valor encontrado  $x = 0,0186$  m é menor que  $x_{23} = 0,0457$  m, trata-se do domínio 2, confirmando a suposição inicial.

- **Cálculo do momento**

Como a viga trabalha no domínio 2, calcula-se o momento resistente com a equação 3.41:

$$M_d = F_i \cdot (d - 0,4 \cdot x) = A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - 0,4 \cdot x) = 0,5 \cdot \frac{50}{1,15} \cdot (0,1765 - 0,4 \cdot 0,0186) = 3,675 \text{ kNm}$$

e, portanto, o máximo momento que pode atuar na viga é:

$$M = \frac{M_d}{1,4} = \frac{3,675}{1,4} = 2,625 \text{ kNm}$$

b) Armadura  $A_s = 2 \text{ cm}^2$ .

- **Profundidade da linha neutra**

Considerando inicialmente que a seção trabalhe nos domínios 2 ou 3, determina-se a posição da linha neutra (equação 3.40):

$$x = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,68 \cdot b_w \cdot f_{cd}} = \frac{2,0 \cdot (50 / 1,15)}{0,68 \cdot 0,12 \cdot (20000 / 1,4)} = 0,0746 \text{ m}$$

- **Verificação do domínio em que a viga trabalha**

O valor encontrado para  $x$  (0,07459 m) é menor que o limite de  $0,45 \cdot d$  e superior ao  $x_{23} = 0,0457 \text{ m}$ , limite do domínio 2; portanto, ela trabalha no domínio 3.

- **Cálculo do momento**

Como a viga trabalha no domínio 3,  $f_s = f_{yd}$ , e  $M_d$  é determinado com a equação 3.41:

$$M_d = F_i \cdot (d - 0,4 \cdot x) = A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - 0,4 \cdot x) = 2 \cdot \frac{50}{1,15} \cdot (0,1765 - 0,4 \cdot 0,0746) = 12,753 \text{ kNm}$$

e, portanto, o máximo momento que pode atuar na viga é:

$$M = \frac{M_d}{1,4} = \frac{12,753}{1,4} = 9,11 \text{ kNm}$$

### 3.7.4 CÁLCULO DA ALTURA MÍNIMA DE UMA SEÇÃO COM ARMADURA SIMPLES

Seja uma viga, com armadura simples, submetida a um momento fletor  $M_d$  em uma determinada seção. A menor altura necessária ( $d_{\min}$ ) para a seção resistir a esse momento é aquela em que a posição da linha neutra acarreta o maior momento que a viga é capaz de resistir, ou seja, o momento aplicado será igual ao momento resistente máximo da seção.

Dessa forma, antes da imposição da ductilidade mínima pela norma, como o máximo momento resistente ocorria para a posição da linha neutra referente ao limite

entre os domínios 3 e 4, a altura mínima era a que levava a essa situação. Com o limite agora imposto pela norma de  $x/d = 0,45$  para concretos até a classe C50, foi visto no item anterior que o momento máximo é obtido para esse valor e, portanto, é para essa profundidade da linha neutra que se obtém a menor altura possível para a viga resistir ao momento atuante de cálculo.

A partir das equações 3.21 e 3.25 é possível determinar o valor da altura útil  $d$  de uma viga:

$$\text{Equação 3.21: } M_d = (0,68 \cdot x \cdot d - 0,272 \cdot x^2) \cdot b_w \cdot f_{cd}$$

$$\text{Equação 3.25: } \frac{x}{d} = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_s}$$

Fazendo  $\xi = \frac{x}{d} = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_s}$ , obtém-se da equação 3.25  $x = \xi \cdot d$ , que colocado na equação

3.21 resulta

$$M_d = (0,68 \cdot \xi \cdot d^2 - 0,272 \cdot \xi^2 \cdot d^2) \cdot b_w \cdot f_{cd}$$

e a altura útil da viga fica dada por:

$$d = \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd} \cdot (0,68 \cdot \xi - 0,272 \cdot \xi^2)}} \quad (3.42)$$

Com a limitação  $x/d \leq 0,45$  ( $\xi = x/d \leq 0,45$ ), de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, a altura mínima ocorre quando  $\xi = 0,45$ , e assim, para encontrá-la, basta colocar esse valor na equação 3.42, resultando:

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd} \cdot (0,68 \cdot 0,45 - 0,272 \cdot 0,45^2)}} = \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd} \cdot 0,25092}} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd}}} \quad (3.43)$$

### EXEMPLO 5

Para a seção retangular de concreto armado do exemplo 1, determinar a altura mínima ( $d_{\min}$ ) e a quantidade de armadura longitudinal necessária ( $A_s$ ). Dados nas unidades necessárias:

aço CA50:  $f_{yk} = 500 \text{ MPa} = 50 \text{ kN/cm}^2$ ;  $f_{td} = 20 \text{ MPa} = 20.000 \text{ kN/m}^2 = 2 \text{ kN/cm}^2$ ;  
 $M_d = 1,4 \cdot M = 1,4 \cdot 12,2 = 17,08 \text{ kNm}$ .

A altura mínima é obtida para  $\xi = x/d \leq 0,45$ ; para isso, pode ser empregada diretamente a equação 3.43.

$$d_{\min} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd}}} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{17,08}{0,12 \cdot 20000 / 1,4}} = 0,1996 \text{ m} \Rightarrow d_{\min} = 19,96 \text{ cm}$$

Cálculo da armadura necessária para  $d_{\min} = 19,96 \text{ cm}$  (nessa situação,  $f_t = f_{yd}$ ):

$$x = 0,45 \cdot d = 0,45 \cdot 19,96 \Rightarrow x = 8,98 \text{ cm}$$

$$z = d - 0,4 \cdot x = 19,96 - 0,4 \cdot 8,98 \Rightarrow z = 16,34 \text{ cm}$$

$$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_t} = \frac{M_d}{z \cdot f_{yd}} = \frac{17,08}{0,1634 \cdot 50 / 1,15} \Rightarrow A_s = 2,40 \text{ cm}^2$$

### 3.7.5 FÓRMULAS ADIMENSIONAIS PARA DIMENSIONAMENTO DE SEÇÕES RETANGULARES

Sempre que possível, é conveniente trabalhar com fórmulas adimensionais, pois facilitam o emprego de diversos sistemas de unidades e permitem a utilização de quadros e gráficos de modo mais racional. Na forma adimensional, para concretos até a classe C50, as equações ficam:

#### a) Equação de $M_d$ (equação 3.21)

- Dividindo ambos os membros da equação de  $M_d$  por  $b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}$ , tem-se:

$$\frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{(0,68 \cdot x \cdot d - 0,272 \cdot x^2) \cdot b_w \cdot f_{cd}}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \left( 0,68 \cdot \frac{x}{d} - 0,272 \cdot \frac{x^2}{d^2} \right)$$

- chamando

$$\frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \text{KMD} \text{ e } \frac{x}{d} = \text{KX}, \text{ a equação anterior torna-se:}$$

$$\text{KMD} = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = 0,68 \cdot (\text{KX}) - 0,272 \cdot (\text{KX})^2 \quad (3.44)$$

- A equação 3.44 contém apenas termos adimensionais, e KX só pode variar entre 0 e 1 ( $x = 0$  e  $x = d$ ):

$$x = 0 \text{ (início do domínio 2)} \Rightarrow \text{KX} = x/d = 0 \Rightarrow \text{KMD} = 0$$

$$x = d \text{ (fim do domínio 4)} \Rightarrow \text{KX} = x/d = 1 \Rightarrow \text{KMD} = 0,408$$

b) Expressão que fornece o braço de alavanca  $z$  ( $z = d - 0,4 \cdot x$ )

• Dividindo os dois termos por  $d$  resulta

$$\frac{z}{d} - \frac{d - 0,4 \cdot x}{d} = 1 - 0,4 \cdot \frac{x}{d}$$

chamando  $\frac{z}{d} = KZ$  e lembrando que  $KX = \frac{x}{d}$ , da equação anterior obtém-se  $KZ$ :

$$KZ = 1 - 0,4 \cdot KX \quad (3.45)$$

c) Expressão para o cálculo da armadura (equação 3.23)

$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_c}$ , e, como  $z = (KZ) \cdot d$ , resulta:

$$A_s = \frac{M_d}{(KZ) \cdot d \cdot f_c} \quad (3.46)$$

d) Equação que relaciona as deformações com a altura da linha neutra (equação 3.25)

$\frac{x}{d} = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_s}$ , e, como  $\frac{x}{d} = KX$ , resulta:

$$KX = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_s} \quad (3.47)$$

Como  $KX$  só admite valores de 0 a 1, pode-se construir um quadro (Quadro 3.1) em que a cada  $KX$  arbitrado entre 0 e 1 corresponde: um valor de  $KMD$ , calculado pela equação 3.44; um de  $KZ$  calculado pela equação 3.45; e, conhecendo-se  $\epsilon_c$ , um de  $\epsilon_s$ , pela equação 3.47. É importante destacar que conhecido o par de deformações ( $\epsilon_c$ ;  $\epsilon_s$ ) se conhece o domínio em que a peça está trabalhando. No quadro, por praticidade, foram dados valores a  $KMD$  e calculados os demais, mantidos os limites de validade para  $KX$ . O quadro contém os valores referentes aos domínios 2, 3 e parte do 4, mas é importante ressaltar que só têm validade os valores abaixo de  $KX = x/d = 0,45$ , correspondente a  $KMD = 0,25$ .

Para concretos das classes C50 a C90, pode-se repetir o raciocínio anterior e também confeccionar um quadro para o cálculo de seções retangulares. As equações necessárias e o quadro resultante, para todas as situações, encontram-se no Adendo B deste capítulo.

$$K_{md} = \frac{I}{b}$$

Quadro 3.1 Valores para cálculo de armadura longitudinal de seções retangulares para concretos até a classe C50.

KMD	KX	KZ	$\epsilon_c$	$\epsilon_s$	KMD	KX	KZ	$\epsilon_c$	$\epsilon_s$
0,0100	0,0148	0,9941	0,1502	10,000	0,2050	0,3506	0,8597	3,5000	6,4814
0,0200	0,0298	0,9881	0,3068	10,000	0,2100	0,3609	0,8556	3,5000	6,1971
0,0300	0,0449	0,9820	0,4704	10,000	0,2150	0,3714	0,8515	3,5000	5,9255
0,0400	0,0603	0,9759	0,6414	10,000	0,2200	0,3819	0,8473	3,5000	5,6658
0,0500	0,0758	0,9697	0,8205	10,000	0,2250	0,3925	0,8430	3,5000	5,4170
0,0550	0,0836	0,9665	0,9133	10,000	0,2300	0,4033	0,8387	3,5000	5,1785
0,0600	0,0916	0,9634	1,0083	10,000	0,2350	0,4143	0,8343	3,5000	4,9496
0,0650	0,0995	0,9602	1,1056	10,000	0,2400	0,4253	0,8299	3,5000	4,7297
0,0700	0,1076	0,9570	1,2054	10,000	0,2450	0,4365	0,8254	3,5000	4,5181
0,0750	0,1156	0,9537	1,3077	10,000	0,2500	0,4479	0,8208	3,5000	4,3144
0,0800	0,1238	0,9505	1,4126	10,000	0,2550	0,4594	0,8162	3,5000	4,1181
0,0850	0,1320	0,9472	1,5203	10,000	0,2600	0,4711	0,8115	3,5000	3,9287
0,0900	0,1403	0,9439	1,6308	10,000	0,2650	0,4830	0,8068	3,5000	3,7459
0,0950	0,1485	0,9406	1,7444	10,000	0,2700	0,4951	0,8020	3,5000	3,5691
0,1000	0,1569	0,9372	1,8611	10,000	0,2750	0,5074	0,7970	3,5000	3,3981
0,1050	0,1654	0,9339	1,9810	10,000	0,2800	0,5199	0,7921	3,5000	3,2324
0,1100	0,1739	0,9305	2,1044	10,000	0,2850	0,5326	0,7870	3,5000	3,0719
0,1150	0,1824	0,9270	2,2314	10,000	0,2900	0,5455	0,7818	3,5000	2,9162
0,1200	0,1911	0,9236	2,3621	10,000	0,2950	0,5586	0,7765	3,5000	2,7649
0,1250	0,1998	0,9201	2,4967	10,000	0,3000	0,5721	0,7712	3,5000	2,6179
0,1300	0,2086	0,9166	2,6355	10,000	0,3050	0,5858	0,7657	3,5000	2,4748
0,1350	0,2175	0,9130	2,7786	10,000	0,3100	0,5998	0,7601	3,5000	2,3355
0,1400	0,2264	0,9094	2,9263	10,000	0,3150	0,6141	0,7544	3,5000	2,1997
0,1450	0,2354	0,9058	3,0787	10,000	0,3200	0,6287	0,7485	3,5000	2,0672
0,1500	0,2445	0,9022	3,2363	10,000	0,3300	0,6590	0,7364	3,5000	1,8100
0,1550	0,2536	0,8985	3,3391	10,000	0,3400	0,6910	0,7236	3,5000	1,5652
0,1600	0,2630	0,8948	3,5000	9,8104	0,3500	0,7249	0,7100	3,5000	1,3283

Quadro 3.1 Continuação...

KMD	KX	KZ	$\epsilon_c$	$\epsilon_s$	KMD	KX	KZ	$\epsilon_c$	$\epsilon_s$
0,1650	0,2723	0,8911	3,5000	9,3531	0,3600	0,7612	0,6955	3,5000	1,0983
0,1700	0,2818	0,8873	3,5000	8,9222	0,3700	0,8003	0,6799	3,5000	0,8732
0,1750	0,2913	0,8835	3,5000	8,5154	0,3800	0,8433	0,6627	3,5000	0,6506
0,1800	0,3009	0,8796	3,5000	8,3106					
0,1850	0,3106	0,8757	3,5000	7,7662					
0,1900	0,3205	0,8718	3,5000	7,4204					
0,1950	0,3305	0,8678	3,5000	7,0919					
0,2000	0,3405	0,8638	3,5000	6,7793					

### EXEMPLO 6

Para a seção retangular (concreto armado) do exemplo 1 ( $b_w = 0,12$  m,  $M = 12,2$  kNm), determinar a quantidade de armadura longitudinal necessária ( $A_s$ ), admitindo, primeiramente, altura útil  $d = 0,29$  m, e, em seguida, que ela não seja conhecida. Utilizar fórmulas adimensionais e quadro para dimensionamento. Considerar  $f_{cd} = 20$  MPa (20000 kN/m<sup>2</sup>) e aço CA50.

a) Admitindo que a altura útil seja conhecida ( $d = 29$  cm)

• Cálculo de KMD

$$KMD = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{17,08}{0,12 \cdot 0,29^2 \cdot \frac{20000}{1,4}} = 0,12$$

Com KMD = 0,12 (Quadro 3.1): KX = 0,1911; KZ = 0,9236;  $\epsilon_c = 2,3621\%$ ;  $\epsilon_s = 10,00\%$ .

Como  $KX = x/d < 0,45$ , portanto abaixo do limite imposto pela norma, podem-se continuar os cálculos.

• Domínio em que a peça atingirá o estado limite último

$$\epsilon_s = 10,00\% \text{ e } \epsilon_c = 2,3621\% < 3,5\% \Rightarrow \text{domínio 2}$$

- Cálculo de  $A_s$  (equação 3.46)

$$A_s = \frac{M_d}{(KZ) \cdot d \cdot f_s} = \frac{17,08(\text{kNm})}{0,9236 \cdot 0,29(\text{m}) \cdot \frac{50(\text{kN/cm}^2)}{1,15}} \Rightarrow A_s = 1,46 \text{ cm}^2$$

b) Admitindo que a altura útil não seja conhecida

- Primeiro, calcula-se  $d_{\min}$  com a equação 3.43

$$d_{\min} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd}}} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{17,08}{0,12 \cdot 20000 / 1,4}} = 0,20$$

- Cálculo de KMD com a equação 3.44 (com  $d = d_{\min}$ )

$$\text{KMD} = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{17,08}{0,12 \cdot 0,20^2 \cdot 20000 / 1,4} = 0,250$$

- Cálculo de  $A_s$

Com KMD = 0,250 (Quadro 3.1):  $KX = 0,4479$ ;  $KZ = 0,8208$ ;  $\epsilon_c = 3,5\%$ ;  $\epsilon_s = 4,3144\%$ .

$$\epsilon_s = 4,3144\% > \epsilon_{yd} \Rightarrow f_s = f_{yk} = \frac{50}{1,15} \text{ kN/cm}^2$$

$$A_s = \frac{M_d}{(KZ) \cdot d \cdot f_s} = \frac{17,08}{0,8208 \cdot 0,20 \cdot 50 / 1,15} \Rightarrow A_s = 2,39 \text{ cm}^2$$

### 3.7.6 CÁLCULO DE SEÇÕES COM ARMADURA DUPLA

Podem ocorrer situações em que, por imposições de projeto, arquitetônicas etc., seja necessário utilizar para a viga uma altura menor que a altura mínima exigida pelo momento fletor atuante de cálculo  $M_d$ .

Nesse caso, determina-se o momento ( $M_{\min}$ ) que a seção consegue resistir com a sua altura real e armadura apenas tracionada (armadura simples  $A_{s1}$ ), trabalhando no limite da relação  $x = 0,45 \cdot d$  (domínio 3); a diferença entre o momento atuante  $M_d$  e o momento  $M_{\min}$ , que será chamada de  $M_2$  ( $M_2 = M_d - M_{\min}$ ), será resistida por uma armadura de compressão, e para que seja mantido o equilíbrio, por uma adicional de tração. Nessa situação, a viga terá uma armadura inferior tracionada e uma superior comprimida (armadura dupla). Assim:

- $M_{lim}$  – momento obtido impondo que a seção trabalhe no limite da ductilidade  $x/d = 0,45$ ; é resistido pelo concreto comprimido e por uma armadura tracionada  $A_{s1}$ ;
- $M_2$  – momento que será resistido por uma armadura comprimida  $A'_s$  e, para que haja equilíbrio, por uma armadura tracionada  $A_{s2}$  (além de  $A_{s1}$ , já calculada para  $M_{limite}$ ).

Com  $x = 0,45 \cdot d$ , determina-se  $M_{lim}$  e, com ele, a armadura tracionada  $A_{s1}$  e também o momento  $M_2$  ( $M_2 = M_d - M_{lim}$ ); com  $M_2$  calcula-se finalmente  $A_{s2}$  e  $A'_s$ . É preciso, ainda, verificar se a armadura comprimida  $A'_s$  atingiu a deformação de escoamento ou não, pois a região comprimida da seção sofre deformações específicas menores que a região tracionada (até 0,0035, que é a máxima permitida para o concreto comprimido). A Figura 3.19 ilustra esquematicamente o problema.

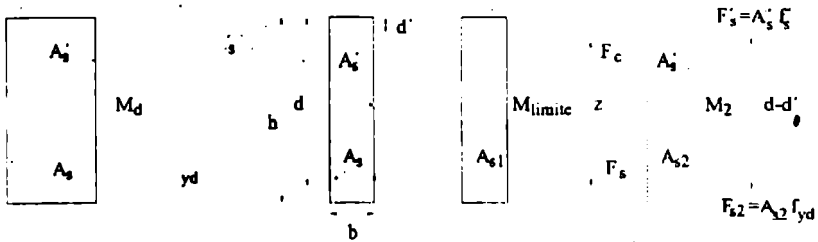


Figura 3.19 Seção de uma viga com armadura dupla.

O momento  $M_{lim}$  pode ser obtido da equação 3.20, com  $z_{lim} = d - 0,4 \cdot x_{lim}$  e  $x_{lim} = 0,45d$ :

$$M_{lim} = F_c \cdot z_{lim} = (0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot 0,8 \cdot x_{lim}) \cdot (d - 0,4 \cdot x_{lim}) = 0,251 \cdot b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd} \quad (3.48)$$

A armadura  $A_{s1}$  é obtida da equação 3.24, com  $M_{lim}$  no lugar de  $M_d$  e  $z = z_{lim} = d - 0,4 \cdot x_{lim} = d \cdot (1 - 0,4 \cdot x_{lim}/d) = d \cdot [1 - 0,4 \cdot (KX)_{lim}]$ .

$$A_{s1} = \frac{M_{lim}}{z \cdot f_{yd}} = \frac{M_{lim}}{(d - 0,4 \cdot x_{lim}) \cdot f_{yd}} = \frac{M_{lim}}{[1 - 0,4 \cdot (KX)_{lim}] \cdot d \cdot f_{yd}} \quad (3.49)$$

Fazendo o equilíbrio da seção da Figura 3.19 com  $M_2$  (não há mais colaboração do concreto), pode ser obtida a armadura  $A_{s2}$ , correspondente ao momento  $M_2$ :

$M_2 = F_{s2} \cdot (d - d') = A_{s2} \cdot f_{yd} \cdot (d - d')$ , e então:

$$A_{s2} = \frac{M_2}{(d - d') \cdot f_{yd}} = \frac{M_d - M_{lim}}{(d - d') \cdot f_{yd}} \quad (3.50)$$

Chamando de  $A_s$  o total de armadura tracionada, ou seja,  $A_s = A_{s1} + A_{s2}$ , resulta:

$$A_s = \frac{M_{lim}}{[1 - 0,4 \cdot (KX)_{lim}] \cdot d \cdot f_{yd}} + \frac{M_d - M_{lim}}{(d - d') \cdot f_{yd}} \quad (3.51)$$

Fazendo o equilíbrio de momentos em relação ao Centro de Gravidade (CG) da armadura tracionada na seção com  $M_2$ , obtém-se  $A_s$ :

$$A_s \cdot f_s \cdot (d - d') = M_2$$

$$A_s = \frac{M_2}{(d - d') \cdot f_s} \rightarrow A_s = \frac{M_d - M_{lim}}{(d - d') \cdot f_s} \quad (3.52)$$

Finalmente, é preciso conhecer a deformação específica da armadura comprimida  $\epsilon_s$  para encontrar a tensão na armadura comprimida  $f_s$ . O valor de  $\epsilon_s$  é obtido da Figura 3.19:

$$\frac{0,35}{x_{lim}} = \frac{\epsilon_s}{(x_{lim} - d')} \rightarrow \epsilon_s = \frac{0,35 \cdot (x_{lim} - d')}{x_{lim}} \quad (3.53)$$

em que:

- $d'$  – distância entre o CG da armadura comprimida até a borda superior;
- $(d - d')$  – braço de alavanca da seção com as armaduras tracionada e comprimida;
- $\epsilon_s, f_s$  – deformação específica e tensão na armadura comprimida;
- $x_{lim}$  – linha neutra limite para atender a condição de ductilidade  $x = 0,45 \cdot d$  para concretos até a classe C50.

### EXEMPLO 7

Para um momento  $M = 45 \text{ kNm}$ , calcular a armadura necessária de uma seção retangular com largura  $b_w = 0,12 \text{ m}$  e  $d = 0,29 \text{ m}$ , com aço CA50 e  $f_{ct} = 20 \text{ MPa}$ . Considerar estribos de  $\Phi = 6 \text{ mm}$  e barras longitudinais (comprimidas ou tracionadas) de  $\Phi = 10 \text{ mm}$  e cobrimento de  $2,5 \text{ cm}$ , de acordo com Tabela 7.2 da ABNT NBR 6118:2014, para vigas em ambientes com classe de agressividade ambiental I (Quadro 4.4, capítulo 4).

a) Cálculo da altura mínima da seção para  $M = 45 \text{ kNm}$ , conforme a equação 3.43, em que  $x/d = 0,45$ :

$$d_{min} = \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{ct} \cdot (0,68 \cdot 0,45 - 0,272 \cdot 0,45^2)}} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{ct}}} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{1,4 \cdot 45}{0,12 \cdot 20000 / 1,4}} = 0,383 \text{ m}$$

Como  $d = 0,29 \text{ m} < d_{\min} = 0,383 \text{ m} \Rightarrow$  armadura dupla!

a) Cálculo de momento limite ( $M_{\lim}$ ) com a equação 3.48:

$$M_{\lim} = 0,251 \cdot b_w \cdot f_{cd} \cdot d^2 = 0,251 \cdot 0,12 \cdot 0,29^2 \cdot 20000/1,4 = 36,19 \text{ kN m}$$

b) Cálculo de  $M_2$ :

$$M_2 = M_d - M_{\lim} = 1,4 \cdot 45 - 36,19 = 26,81 \text{ kN m}$$

c) Cálculo de  $A_{s1}$  ( $KX_{\limite} = x_{\limite}/d = 0,45$ ) com a expressão 3.51:

$d = 29 \text{ cm}$  e  $d' = 2,5 + 0,6 + 1,0/2 = 3,6 \text{ cm}$  (distância da armadura comprimida à borda comprimida, em que  $0,6 \text{ cm}$  é o diâmetro dos estribos e  $1,0 \text{ cm}$  é o diâmetro da armadura longitudinal):

$$A_s = \frac{36,19}{(1 - 0,4 \cdot 0,45) \cdot 0,29 \cdot \frac{50}{1,15}} + \frac{1,4 \cdot 45 - 36,19}{(0,29 - 0,036) \cdot \frac{50}{1,15}} = 3,50 + 2,43 \Rightarrow A_s = 5,93 \text{ cm}^2$$

d) Cálculo de  $A_s'$ , sendo necessário conhecer antes  $f_s'$  e, portanto,  $\epsilon_s'$ , com a equação 3.53:

$$\epsilon_s' = \frac{0,0035 \cdot (x_{\lim} - d')}{x_{\lim}} = \frac{0,0035 \cdot (0,45 \cdot 0,29 - 0,036)}{0,45 \cdot 0,29} = 0,0025$$

como  $\epsilon_s' > \epsilon_{yd}$  ( $\epsilon_{yd} = 0,00207$  para CA50)  $\Rightarrow f_s' = f_{yd}$

$$A_s' = \frac{M_d - M_{\limite}}{(d - d') \cdot f_{yd}} = \frac{1,4 \cdot 45 - 36,19}{(0,29 - 0,036) \cdot \frac{50}{1,15}} \Rightarrow A_s' = 2,43 \text{ cm}^2$$

### 3.7.7 CÁLCULO DE ARMADURA EM VIGAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL EM FORMA DE "T"

Em um piso (laje) de concreto armado apoiado no contorno em vigas, as lajes maciças e as vigas não são independentes umas das outras; pelo fato de as estruturas de concreto serem monolíticas (a não ser que, construtivamente, sejam tomadas medidas para que isso não ocorra), seus elementos, lajes e vigas, trabalham em conjunto.

Quando a viga sofre uma deformação, parte da laje adjacente a ela (em um ou em dois lados) também se deforma, comportando-se como se fosse parte da viga, colaborando em sua resistência. Dessa forma, a viga incorpora parte da laje, e sua seção deixa de ser retangular, passando a ter a forma de um "T" (ou de um "L" invertido).

Ao fazer um corte transversal em um piso formado por lajes e vigas (Figura 3.20), observa-se que o piso se compõe, na verdade, de um conjunto de vigas com a forma de um "T" trabalhando lado a lado.

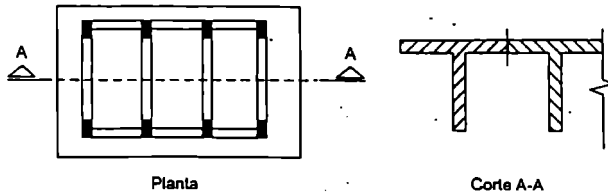


Figura 3.20 Piso com vigas de seção transversal "T".

### Considerações importantes

a) A parte vertical da viga é chamada de alma (nervura), e a parte horizontal de mesa, que é composta de duas abas (partes salientes), é referida com a seguinte notação (Figura 3.21):

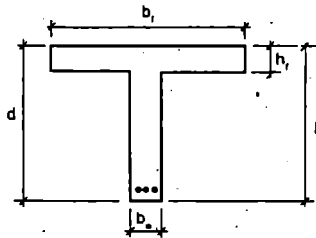


Figura 3.21 Viga com seção transversal em forma de "T".

b) Uma viga de concreto armado, formada por uma nervura e duas abas, só será considerada como de seção "T" quando a mesa e parte da alma estiverem comprimidas (Figura 3.22a); caso contrário, dependendo do sentido de atuação do momento fletor, apenas a parte superior da mesa ou inferior da alma estarão comprimidas (essas partes têm a forma retangular), e como as regiões tracionadas de concreto não trabalham, ou seja, não colaboram na resistência, a viga será calculada como tendo seção retangular (Figura 3.22b).

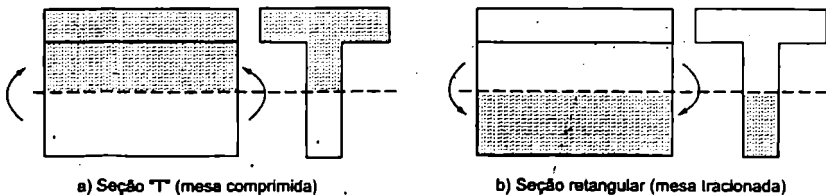


Figura 3.22 Viga de seção "T" e retangular.

Como consequência, nos trechos de momentos negativos junto aos apoios (vigas contínuas), provavelmente a seção da viga será retangular (é o caso de viga abaixo da laje), pois apenas parte da alma estará comprimida.

Rocha

- Outra consequência é que, no caso de momentos positivos, a viga só será considerada de seção "T" se a linha neutra estiver passando pela alma; caso contrário, a região de concreto comprimida será retangular, com largura igual a  $b_w$  e não haverá colaboração da alma e de parte da mesa, que estarão tracionadas (Figura 3.23).

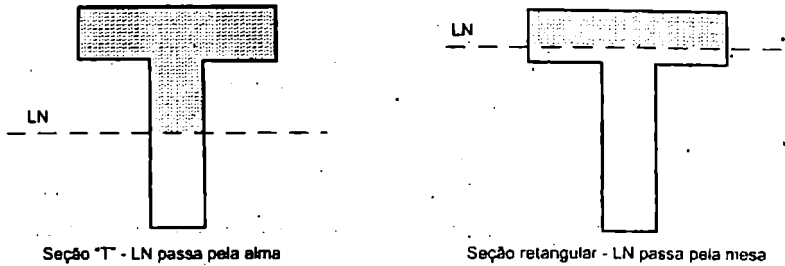


Figura 3.23 Viga de seção "T" ou retangular de acordo com a posição da LN.

c) Nas situações em que a LN passa pela alma da seção, é possível usar os quadros para seções retangulares, fazendo o cálculo em duas etapas (Figura 3.24):

- Calcula-se inicialmente o momento resistido pelas abas ( $M_1$ ):

$$M_1 = F_{c1} \cdot \left( d - \frac{h_c}{2} \right) = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot h_f \cdot (b_f - b_w) \cdot \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \quad (3.54)$$

- O momento restante ( $M_2$ ) é absorvido pela nervura (alma), como nas seções retangulares:

$$M_2 = M_d - M_1 = F_{c2} \cdot \left( d - \frac{y}{2} \right) \quad (3.55)$$

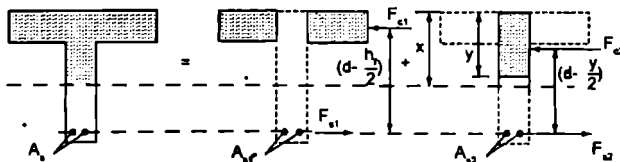


Figura 3.24 Seção "T" dividida em duas seções retangulares.

- A armadura é obtida somando-se a necessária para resistir a cada um dos momentos:

$$A_s = \frac{M_1}{(d - h_f / 2) \cdot f_{yd}} + \frac{M_2}{(KZ) \cdot d \cdot f_{yd}} \quad (3.56)$$

d) Não é toda a largura da laje adjacente que colabora na resistência da viga; por absurdo, imagine-se que uma viga central estivesse a quilômetros das vigas laterais: é evidente que entre uma viga lateral e a central existiria uma parte da laje que não ajudaria na resistência nem de uma viga nem de outra, ou seja, estaria trabalhando realmente apenas como elemento para transferir cargas às vigas. Conclui-se, portanto, que apenas uma parte da laje, mais próxima à viga, colabora com ela. A distribuição de tensões de compressão na parte superior da viga (mesa) não é uniforme: há concentração de valores junto à parte central da viga (alma), como esquematizado na Figura 3.25. A determinação da largura da laje que colabora com a viga (largura colaborante ou efetiva -  $b_f$ ) é feita integrando a distribuição de tensões na altura  $h_f$  e em uma largura até onde as tensões tendem a zero, a fim de encontrar a resultante; essa resultante é igualada a uma outra, obtida por meio da distribuição uniforme de tensões, com valor igual a  $0,85 \cdot f_{cd}$ , atuando na altura  $h_f$  e largura  $b_f$  ( $F_c = b_f \cdot h_f \cdot 0,85 \cdot f_{cd}$ ).

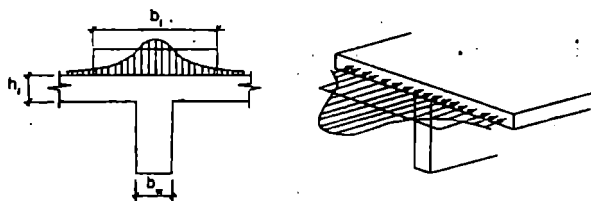


Figura 3.25 Distribuição das tensões de compressão na mesa de uma viga "T".

e) O procedimento acima resulta em um cálculo complexo, e por essa razão existem soluções simplificadas a favor da segurança, mas baseadas nos mesmos princípios. Uma delas é a que propõe a ABNT NBR 6118:2014 (item 14.6.2.2), que, de acordo com esse item, a largura colaborante  $b_f$  será a largura da viga  $b_w$  acrescida de no máximo 10% da distância  $a$  entre os pontos de momento fletor nulo, para cada lado da viga em que houver laje colaborante. A distância  $a$  pode ser estimada em função do comprimento  $\ell$  do tramo considerado:

- $a = \ell$  (viga simplesmente apoiada);
- $a = 0,75 \cdot \ell$  (tramo com momento em uma só extremidade);
- $a = 0,60 \cdot \ell$  (tramo com momentos nas duas extremidades);
- $a = 2 \cdot \ell$  (tramo em balanço).

Alternativamente, a determinação da distância  $a$  pode ser feita pela análise dos diagramas de momentos fletores na estrutura. No caso de vigas contínuas, permite-se calculá-las com uma única largura colaborante para todas as seções, inclusive nos apoios sob momentos negativos, desde que essa largura seja calculada a partir do trecho de momentos positivos onde a largura resulte mínima.

Deverão ser respeitados os limites de  $b_f$  e  $b_j$  conforme a Figura 3.26:

$$b_1 \leq \begin{cases} 0,5 \cdot b_2 \\ 0,10 \cdot a \end{cases} \quad b_3 \leq \begin{cases} b_4 \\ 0,10 \cdot a \end{cases} \quad (3.58)$$

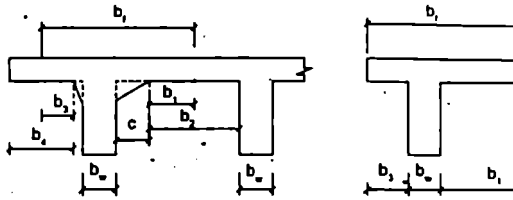


Figura 3.26 Largura de mesa colaborante (Figura 14.2 da ABNT NBR 6118:2014).

### EXEMPLO 8

Calcular a armadura para a viga simplesmente apoiada, de vão  $\ell$  igual 30 m, cuja seção é a da Figura 3.27 e está submetida a um momento  $M_d = 6770$  kNm. Considerar aço CA50 e  $f_{ct} = 30$  MPa.

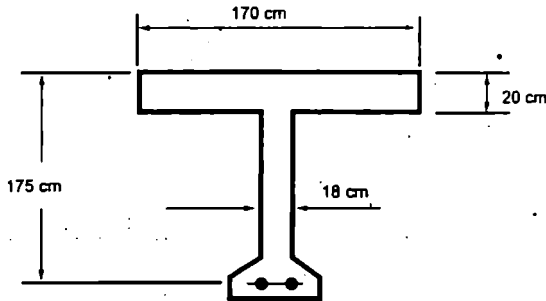


Figura 3.27 Seção transversal da viga do exemplo 8.

a) Determinação da largura colaborante  $b_f$ :

- $b_f \leq b_w + 2 \cdot b_3$ ;
- $b_w = 18$  cm;
- $b_3 = 0,10 \cdot a = 0,10 \cdot \ell = 0,10 \cdot 3000 = 300$  cm (viga simplesmente apoiada,  $a = \ell$ );
- $b_4 = (170 - 18)/2 = 76$  cm;
- $b_3 > b_4 \rightarrow 300 > 76$ ;
- $b_f = 18 + 2 \cdot 76 = 170$  cm.

b) Determinação da posição da linha neutra, supondo inicialmente que passe na mesa da viga (seção retangular, nesse caso  $b_w = b_f$ ):

$$KMD = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{6770}{1,7 \cdot 1,75^2 \cdot 30000 / 1,4} = 0,0607$$

Será tomado, no Quadro 3.1,  $KMD = 0,0650$ , maior valor mais próximo ao calculado.

$$KMD = 0,0650 \Rightarrow KX = 0,0995$$

$$x = (KX) \cdot d = 0,0995 \cdot 1,75 = 0,174 \text{ m} < h_f = 0,20 \text{ m}$$

A hipótese adotada inicialmente é válida, ou seja, a linha neutra está na mesa e a seção é retangular.

c) Cálculo da armadura:

$$KMD = 0,0650 \Rightarrow \text{Quadro 3.1} \Rightarrow KZ = 0,9602 \text{ e } \varepsilon_s = 10\text{‰} > \varepsilon_{yd} \Rightarrow f_s = f_{yd}$$

$$A_s = \frac{M_d}{(KZ) \cdot d \cdot f_{yd}} = \frac{6770}{0,9602 \cdot 1,75 \cdot 50 / 1,15} \Rightarrow A_s = 92,7 \text{ cm}^2$$

### EXEMPLO 9

Calcular a armadura necessária para a seção do exemplo 8 supondo  $M_d = 10000 \text{ kNm}$ , com aço CA50 e  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ .

a) Determinação da largura colaborante  $b_f$

A largura colaborante é a mesma do exemplo anterior, ou seja,  $b_f = 170 \text{ cm}$ .

b) Determinação da posição da linha neutra, supondo inicialmente que passe na mesa da viga (seção retangular, nesse caso  $b_w = b_f$ )

$$KMD = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{10000}{1,7 \cdot 1,75^2 \cdot 30000 / 1,4} = 0,0896 \cong 0,0900$$

$$KMD = 0,0900 \Rightarrow \text{Quadro 3.1} \Rightarrow KX = 0,1403$$

$$x = (KX) \cdot d = 0,1403 \cdot 1,75 = 0,246 \text{ m} > h_f = 0,20 \text{ m}$$

Portanto, a hipótese inicial não é válida, pois a linha neutra está fora da mesa, tratando-se de seção "T". Será necessário, assim, determinar a parcela do momento resistido pelas abas e pela alma da seção (Figura 3.28) e a armadura total necessária.

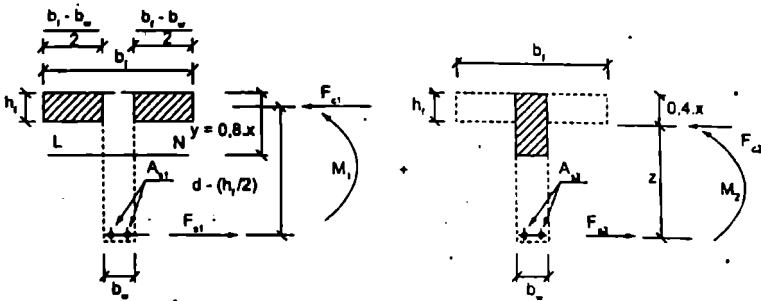


Figura 3.28 Momento resistido pelas abas e pela alma de uma viga "T".

c) Momento resistido pelas abas ( $M_1$ )

$$M_1 = F_{c1} \cdot \left( d - \frac{h_f}{2} \right) = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot h_f \cdot 2 \cdot \left( \frac{b_f - b_w}{2} \right) \cdot \left( d - \frac{h_f}{2} \right) = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot h_f \cdot (b_f - b_w) \cdot \left( d - \frac{h_f}{2} \right)$$

$$M_1 = 0,85 \cdot \frac{30000}{1,4} \cdot 0,20 \cdot (1,70 - 0,18) \cdot \left( 1,75 - \frac{0,2}{2} \right) = 9136,30 \text{ kNm}$$

d) Momento resistido pela alma ( $M_2$ )

$$M_2 = M_d - M_1 = 10000 - 9136,30 = 863,70 \text{ kNm}$$

e) Cálculo da armadura  $A_s$ , que é a soma das parcelas referentes ao momento resistido pelas abas ( $M_1$ ) e ao momento resistido pela mesa ( $M_2$ ); a segunda parcela refere-se a uma seção retangular, com  $b_w = 0,18$  cm, cortada pela LN, e pode ser calculada com o uso do Quadro 3.1.

$$A_s = \frac{M_1}{\left( d - \frac{h_f}{2} \right) \cdot f_{yd}} + \frac{M_2}{(KZ) \cdot d \cdot f_{yd}}$$

$$KMD = \frac{863,70}{0,18 \cdot 1,75^2 \cdot 30000 / 1,4} = 0,0730$$

Será tomado  $KMD = 0,0750$ ; maior valor mais próximo ao calculado.

$$KMD = 0,0750 \Rightarrow KZ = 0,9537, \epsilon_s = 10\text{‰} > \epsilon_{yd} = 2,07\text{‰} \Rightarrow f_t = f_{yd}$$

$$A_s = \frac{9136,30}{(1,75 - 0,20/2) \cdot 50/1,15} + \frac{863,70}{0,9537 \cdot 1,75 \cdot 50/1,15} = 127,35 + 11,90 \rightarrow A_s = 139,25 \text{ cm}^2$$

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) um sistema de laje pré-moldada (treliçada), com altura total de 12 cm ( $\beta 12$ ) e altura da capa de 4,0 cm, foi usado para compor uma laje de vão livre igual a 4 m, simplesmente apoiada nas extremidades em vigas de 15 cm de largura. A carga permanente (peso próprio)  $g_1$  é igual a 1,5 kN/m<sup>2</sup>, a carga de revestimento e contrapiso  $g_2$  é igual a 0,5 kN/m<sup>2</sup> e a acidental  $q$  é igual a 2 kN/m<sup>2</sup>. Qual a armadura necessária  $A_s$  em cada elemento (nervura) para a seção transversal da laje indicada na Figura 3.29?

Dados:  $f_{ck} = 20 \text{ MPa} = 20000 \text{ kN/m}^2$ , aço CA60 e cobrimento igual a 1,5 cm (laje em ambiente de agressividade ambiental I e controle rigoroso); admitir armadura longitudinal de  $\phi = 10 \text{ mm}$ .

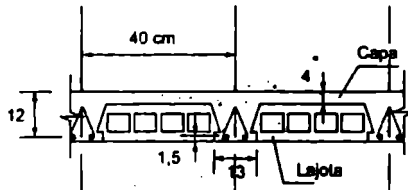


Figura 3.29 Seção transversal da laje (cotas em cm).

a) Carga atuante em uma nervura (a distância entre as nervuras é igual a 40 cm):

$$p = 0,4 \cdot (1,5 + 0,5 + 2,0) = 1,6 \text{ kNm}$$

b) Momento máximo em cada nervura (vigota simplesmente apoiada no eixo das vigas extremas):

$$M_{\max} = \frac{p \cdot \ell^2}{8} = \frac{1,6 \cdot 4,15^2}{8} = 3,44 \text{ kNm}$$

c) Seção transversal: as nervuras têm seção transversal como a indicada na Figura 3.30a, porém, para efeito de cálculo, será empregada a seção da Figura 3.30b (cotas em cm).

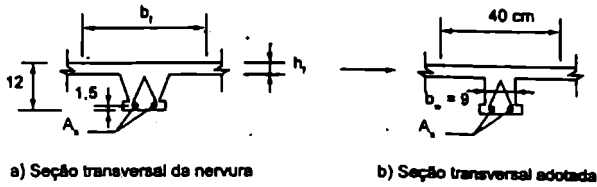


Figura 3.30 Seção transversal real da nervura (a) e da adotada para o cálculo (b).

**d) Largura colaborante ( $b_f$ ):** para o cálculo, é preciso verificar quanto da capa de concreto, que tem 4 cm de espessura e trabalha comprimida, colaborará com a nervura:

$$b_f = b_w + 2 \cdot b_1 = 9 + 2 \cdot 15,5 = 40 \text{ cm, em que:}$$

$b_w = 9 \text{ cm}$  é a largura da alma da seção;

$b_2 = 40 - 9 = 31 \text{ cm}$  é a distância entre as faces das nervuras;

$$b_1 \leq \begin{cases} 0,10 \cdot a = 0,10 \cdot \ell = 0,10 \cdot 400 = 40 \text{ cm} (a = \ell, \text{ viga apoiada}) \\ 0,50 \cdot b_2 = 0,50 \cdot 31 = 15,5 \text{ cm} \end{cases}$$

**e) Verificação da seção:** verificação se a seção é retangular ou "T", admitindo inicialmente que a linha neutra passe pela mesa:

Altura útil  $d = h - 2,0 = 12 - 2,0 = 10,0 \text{ cm}$  (1,5 cm de cobrimento e 0,5 cm correspondente à metade do diâmetro da barra longitudinal).

$$KMD = \frac{M_d}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{1,4 \cdot 3,44}{0,4 \cdot 0,10^2 \cdot \frac{20000}{1,4}} = 0,084$$

Pelo Quadro 3.1 (tomando  $KMD = 0,085$ )  $\Rightarrow KX = 0,132$

$$x = (KX) \cdot d = 0,132 \cdot 10,0 = 1,32 \text{ cm} < h_f = 4,0 \text{ cm}$$

A hipótese inicial é válida, pois a linha neutra passa na mesa e a seção é retangular.

**f) Cálculo da armadura**

Do Quadro 3.1, com  $KMD = 0,085 \Rightarrow KZ = 0,9472$ ;  $\epsilon_c = 1,5203\%$ ;  $\epsilon_s = 10,00\%$

Como  $\epsilon_c = 1,5203\%$  e  $\epsilon_s = 10,00\%$ , a peça está trabalhando no domínio 2 (deformação no aço de  $10,00\%$  e no concreto, menor que  $3,5\%$ ), e  $f_s = f_{sd} = 60 \text{ kN/cm}^2$ .

$$A_s = \frac{M_d}{KZ \cdot d \cdot f_{yd}} = \frac{1,4 \cdot 3,44(\text{kNm})}{0,9472 \cdot 0,10 \cdot \frac{60(\text{kN/cm}^2)}{1,15}} \Rightarrow A_s = 0,98 \text{ cm}^2$$

2) conhecida a seção transversal e armadura (Figura 3.31) de uma nervura (trilho) de laje pré-moldada, determinar o maior vão que ela pode ter, considerando apenas o estado limite último para uma carga total atuante (acidental, revestimentos e peso próprio) de  $6,5 \text{ kN/m}^2$  e armadura composta de  $2 \phi 6,3 \text{ mm}$  ( $A_s = 2 \cdot 0,315 \text{ cm}^2 = 0,63 \text{ cm}^2$ ) de aço CA60.

Dados:  $f_{ct} = 20 \text{ MPa} = 20000 \text{ kN/m}^2$ ; cobrimento =  $2,0 \text{ cm}$ ; altura útil  $d = h - 2,3 \text{ cm}$ .

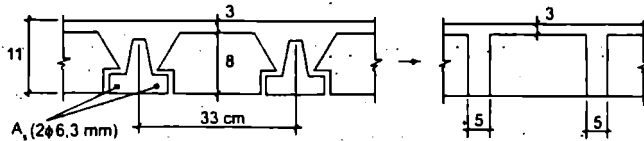


Figura 3.31 Seção transversal real da nervura e da adotada para o cálculo (cotas em cm).

#### a) Determinação da posição ( $x$ ) da linha neutra

- Forças atuantes na seção transversal, admitida como retangular:  
Na armadura tracionada (supondo tensão igual a  $f_{yd}$ ):

$$F_s = A_s \cdot f_{yd} = 0,63 \cdot 10^{-04} (\text{m}^2) \cdot \frac{600000 (\text{kN/m}^2)}{1,15} = 32,87 \text{ kN}$$

No concreto comprimido:

$$F_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot 0,8 \cdot x \cdot b_f = 0,85 \cdot \frac{20000 (\text{kN/m}^2)}{1,4} \cdot 0,8 \cdot x (\text{m}) \cdot 0,33 (\text{m})$$

$$F_c = 3205,71 \cdot x \left( \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \text{m} \right)$$

- Equilíbrio (a força na armadura tracionada deve ser igual à força no concreto comprimido):

$$F_s = F_c \Rightarrow 32,87 = 3205,71 \cdot x \Rightarrow x = 0,01025 \text{ m} = 1,025 \text{ cm} < h_f = 3 \text{ cm} \Rightarrow \text{retangular}$$

#### b) Verificação do domínio em que a seção está trabalhando e tensão na armadura

Dependendo da posição da linha neutra, é possível saber em qual domínio a seção atingirá o estado limite último.

- Altura útil:  $d = h - 2,3 = 11 - 2,3 = 8,7$  cm
- Posição  $x_{23}$  (limite entre os domínios 2 e 3) da linha neutra:

$$x_{23} = 0,259 \cdot d = 0,259 \cdot 8,7 = 2,25 \text{ cm}$$

Como  $x = 1,025$  cm  $<$   $x_{23} = 2,25$  cm, a peça trabalha no domínio 2, atende ao limite  $x/d = 0,45$  e, nesse domínio, a deformação específica da armadura longitudinal, no estado limite último, é de 10,0‰, com o aço atingindo toda sua capacidade, ou seja, com tensão  $f_s = f_{yd} = f_{yk}/1,15$ , conforme a suposição feita inicialmente.

### c) Cálculo do máximo momento resistente ( $M_d$ )

- Equilíbrio ( $d = 0,11 - 0,023 = 0,087$  m;  $z = d - 0,4 \cdot x$ ;  $x = 0,01025$  m):

$$M_d = F_c \cdot z = 3205,71 \text{ (kN/m)} \cdot 0,01025 \text{ (m)} \cdot (0,087 \text{ (m)} - 0,4 \cdot 0,01025 \text{ (m)})$$

$$M_d = 32,87 \text{ (kN)} \cdot 0,083 \text{ (m)} = 2,73 \text{ kNm, ou}$$

$$M_d = F_c \cdot z = 32,87 \text{ (kN)} \cdot (0,087 \text{ (m)} - 0,4 \cdot 0,01025 \text{ (m)})$$

$$M_d = 32,87 \text{ (kN)} \cdot 0,083 \text{ (m)} = 2,73 \text{ kNm}$$

### d) Cálculo do vão máximo possível de uma nervura (apoiada nas extremidades)

- Carga atuante por nervura (intercixo igual a 33 cm):

$$p = 6,5 \text{ (kN/m}^2) \cdot 0,33 \text{ (m)} = 2,145 \text{ kN/m}$$

- Igualando o momento máximo resistente com o atuante em cada nervura:

$$M = \frac{p \cdot \ell^2}{8} \Rightarrow \frac{2,73}{1,4} = \frac{2,145 \cdot \ell^2}{8}$$

- Resulta em um vão máximo  $\ell = 2,70$  m

3) Calcular o máximo valor de  $\ell$  para que a laje pré-moldada  $\beta_{12}$ , usada no pavimento da Figura 3.32, atenda à condição de estado limite último de ruína por flexão. Dados:  $f_{ct} = 20$  MPa; aço CA50;  $q = 1,5$  kN/m<sup>2</sup>;  $g_1 = 1,7$  kN/m<sup>2</sup>;  $g_2 = 1,0$  kN/m<sup>2</sup>; adotar  $d = 10$  cm.

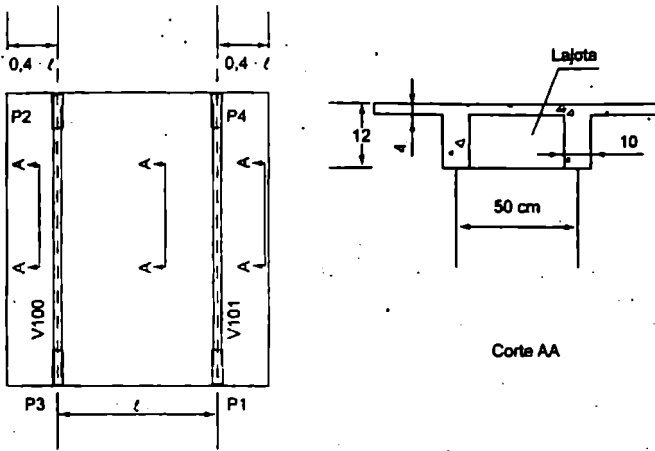


Figura 3.32 Pavimento composto de duas vigas e laje  $\beta_{12}$ .

O sistema estrutural da laje do pavimento pode ser analisado considerando uma nervura central funcionando como uma viga independente, simplesmente apoiada, e com dois balanços, como mostrado na Figura 3.33. As cargas a empregar no cálculo dos momentos máximos negativo e positivo também estão indicadas na figura.

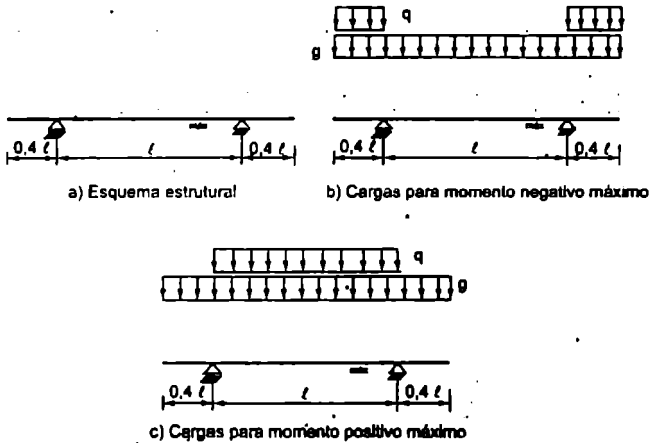


Figura 3.33 Esquema estrutural da nervura e cargas para cálculo dos momentos máximos.

a) Ações na nervura

As ações atuantes na nervura central são obtidas multiplicando-se as intensidades dos carregamentos pela distância entre as nervuras:

Peso próprio:  $g_1 = 1,7 \cdot 0,5 = 0,85 \text{ kN/m}$

Sobrecarga permanente:	$g_2 = 1,0 \cdot 0,5 = 0,50 \text{ kN/m}$
Carga permanente total:	$g = 1,35 \text{ kN/m}$
Carga acidental:	$q = 1,5 \cdot 0,5 = 0,75 \text{ kN/m}$
Carga total ( $g + q$ ):	$p = 2,10 \text{ kN/m}$

### b) Determinação da altura $x$ da linha neutra

A seção da nervura trabalhará conforme indicado na Figura 3.34:

- Para o momento negativo, com uma região comprimida de concreto de largura igual a  $b_w$  e altura a  $0,8 \cdot x$  medida a partir da borda inferior da seção;
- Para o momento positivo, com uma região comprimida que poderá ser retangular ou em forma de "T", dependendo da altura da linha neutra, medida a partir da borda superior da seção; o valor de  $x$ , neste caso, é o correspondente ao limite imposto pela norma, ou seja,  $x/d = 0,45$ :

$$x = 0,45 \cdot d = 0,45 \cdot 0,10 = 0,045 \text{ m} = 4,5 \text{ cm} > h_f = 4,0 \text{ cm}$$

Como  $x > h_f$ , a linha neutra passa na alma e, para o momento positivo, a seção se comporta de fato como tendo a forma de "T".

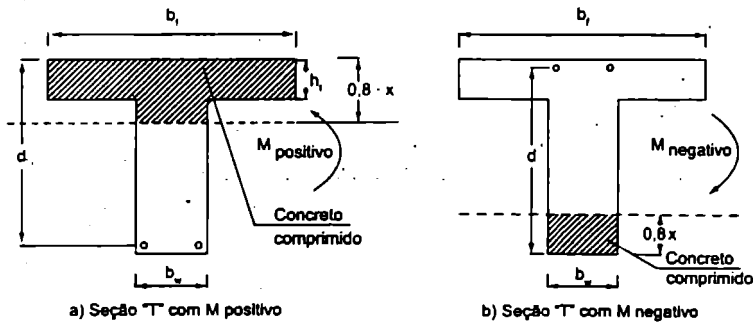


Figura 3.34 Esquema das seções transversais sob momentos fletores positivo e negativo.

### c) Determinação do vão a partir do momento máximo negativo (trecho do balanço)

- Máximo momento negativo que poderá ocorrer no balanço, junto à seção de apoio:

$$M_{\text{max}}^- = 2,10 \cdot \frac{(0,4 \cdot \ell)^2}{2} = 0,168 \cdot \ell^2$$

- Momento negativo resistido pela seção, no caso retangular, com  $x = 0,45$  cm:

$$M_{\text{resist}}^- = \frac{b_w \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,4 \cdot x)}{1,4}$$

$$M_{\text{resist}}^- = \frac{0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,045 \cdot 0,85 \cdot 20000 \cdot (0,10 - 0,4 \cdot 0,045)}{1,4 \cdot 1,4} = 2,56 \text{ kNm}$$

- Igualando os momentos atuante e resistido, encontra-se o máximo vão para que não haja colapso na seção junto ao apoio:

$$M_{\text{max}}^- = M_{\text{resist}}^- \Rightarrow 0,168 \cdot \ell^2 = 2,56 \Rightarrow \ell = 3,90 \text{ m}$$

**d) Determinação do vão a partir do momento máximo positivo (trecho do tramo)**

- Máximo momento positivo atuante (no meio do tramo):

$$M_{\text{max}}^+ = -1,35 \cdot \frac{(0,4 \cdot \ell)^2}{2} + \frac{2,1 \cdot \ell^2}{8} = 0,1545 \cdot \ell^2$$

- Momento positivo resistido pela seção: para determinar o momento positivo resistido utiliza-se o mesmo procedimento para o momento negativo, com a diferença de que, neste caso, a seção se comporta como "T", pois a linha neutra passa abaixo da mesa; assim, a mesa está totalmente comprimida e trabalha com toda sua largura, bem como também está comprimida uma parte da alma. O momento resistido vale:

$$M_{\text{resist}}^+ = \frac{b_w \cdot 0,8 \cdot x \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,4 \cdot x)}{1,4} + \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,5 \cdot h_f)}{1,4}$$

$$M_{\text{resist}}^+ = \frac{0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,045 \cdot 0,85 \cdot 20000 \cdot (0,10 - 0,4 \cdot 0,045)}{1,4 \cdot 1,4} + \frac{(0,5 - 0,1) \cdot 0,04 \cdot 0,85 \cdot 20000 \cdot (0,10 - 0,02)}{1,4 \cdot 1,4}$$

$$M_{\text{resist}}^+ = 2,56 + 11,10 = 13,66 \text{ kNm}$$

- Igualando os momentos atuante e resistido, encontra-se o máximo vão para que não haja colapso no tramo:

$$M_{\text{max}}^+ = M_{\text{resist}}^+ \Rightarrow 0,1545 \cdot \ell^2 = 13,66 \Rightarrow \ell = 9,40 \text{ m}$$

Dessa maneira, o máximo vão possível, atendendo às condições do estado limite último de colapso, é igual a 3,90 m. É importante ressaltar que a seção da nervura, tendo a forma de "T", resiste a um valor de momento negativo bem mais baixo que o positivo, fazendo com que a seção junto ao apoio seja a determinante para o cálculo. Deve-se, portanto, tomar cuidado ao projetar este sistema quando submetido a momentos negativos, pois nem sempre será possível absorver os momentos que são obtidos do cálculo usual "elástico" (ver Anexo 1). Finalmente, em um projeto definitivo, haveria necessidade de verificar o estado limite de deformação excessiva (capítulo 4), que poderia, nesta situação, conduzir a um valor de  $\ell$  inferior ao encontrado aqui.

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Calcular o maior momento que pode ser resistido por uma seção retangular com armadura simples que tem  $b_w = 22$  cm,  $d = 35$  cm,  $f_{ck} = 20$  MPa e aço CA50. Calcular a área necessária de armadura longitudinal.

Resposta:  $M = 88$  kN m;  $A_s = 10,8$  cm<sup>2</sup>.

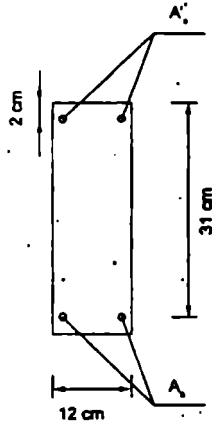
2) Calcular o maior momento que pode ser resistido por uma seção retangular com armadura simples e  $b_w = 22$  cm,  $d = 35$  cm,  $f_{ck} = 20$  MPa, aço CA50 e armadura de tração  $A_s = 5$  cm<sup>2</sup>. Em que domínio trabalha a viga?

Resposta:  $M = 48$  kN m; domínio 3.

3) Calcular a armadura  $A_s$  e indicar o domínio em que trabalhará (no estado limite último) uma viga de seção transversal retangular, utilizando armadura simples, para os seguintes momentos: a) 28 kN m; b) 22 kN m; c) 16 kN m; d) 10 kN m. Dados:  $b_w = 22$  cm;  $d = 20$  cm;  $f_{ck} = 20$  MPa; aço CA60.

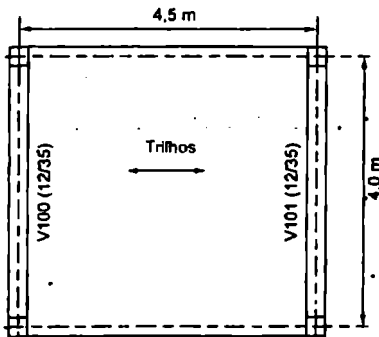
Resposta: a) 6,05 cm<sup>2</sup> (9,50 cm<sup>2</sup> com aço tipo B de acordo com a NB1/00) e domínio 4; b) 3,57 cm<sup>2</sup>; dom. 3-4; c) 2,44 cm<sup>2</sup>; dom. 3; d) 1,44 cm<sup>2</sup>; dom. 2.

4) Calcular para a seção dada o máximo momento resistido e o valor da armadura comprimida  $A_s'$ , de maneira que se tenha um valor econômico para armadura e se empreguem as hipóteses de armadura dupla. Considerar concreto com  $f_{ck} = 20$  MPa, aço CA50 e  $A_s = 6$  cm<sup>2</sup>.



5) Qual o máximo valor de carga acidental a ser resistida pelas vigas ao lado, sem armadura dupla, sabendo-se que a laje pré-moldada resiste a esta carga? O peso próprio da laje, mais revestimentos e piso, é de  $3,0 \text{ kN/m}^2$ , e sobre cada viga existe uma parede de 3 m de altura e espessura de 15 cm.

Dados: a seção central das vigas V100 e V101 é dada na figura; concreto com  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$ ; aço CA50;  $\gamma_{parede} = 18 \text{ kN/m}^3$ .



a) Planta

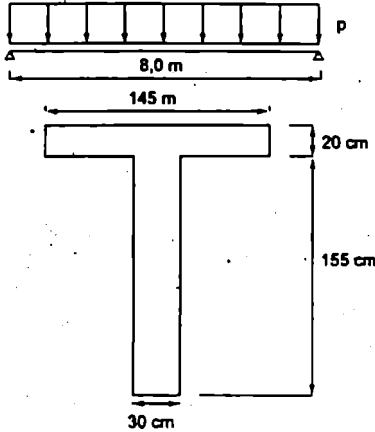


b) Seção transversal das vigas

6) Determinar qual deve ser o valor da altura útil mínima necessária de uma seção transversal retangular de largura de 12 cm, concreto com  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$  e um momento atuante  $M = 20 \text{ kN m}$  para que ela trabalhe no limite dos domínios 3 e 4 nas seguintes situações: a) aço CA25; b) aço CA32; c) aço CA50; d) aço CA60.

7) Determinar o valor da altura mínima que uma viga com seção transversal em forma de "T" deve ter quando:  $b_f = 1,7 \text{ m}$ ;  $h_f = 0,2 \text{ m}$ ;  $b_w = 0,18 \text{ m}$ ;  $M = 7142,8 \text{ kN m}$ ;  $f_{ck} = 26 \text{ MPa}$  e aço CA50.

- 8) Para a viga de uma ponte esquematizada ao lado, calcular a armadura longitudinal necessária no meio do vão AB, considerando  $d = 1,7$  m, CA60 e  $f_{ct} = 30$  MPa, quando:
- $p = 600$  kN/m (já incluído o peso próprio);
  - $p = 900$  kN/m (já incluído o peso próprio);
  - $p = 1450$  kN/m (já incluído o peso próprio).



## ADENDO A

### RESUMO DAS EXPRESSÕES RELACIONADAS NESTE CAPÍTULO

Deformação específica no concreto (até C50) no início do patamar plástico; ocorre em seções totalmente comprimidas	
$\epsilon_{c2} = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ (2,0‰)}$	(3.1)
Deformação específica do concreto (até C50) na ruptura; ocorre nas seções sob flexão	
$\epsilon_{cu} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ (3,5‰)}$	(3.2)
Deformação específica no concreto (C50 até C90) no início do patamar plástico; ocorre em seções totalmente comprimidas	
$\epsilon_{c2} = 2,0‰ + 0,085‰ \cdot (f_{ct} - 50)^{0,53}$	(3.3)
Deformação específica do concreto (C50 até C90) na ruptura; seções sob flexão	
$\epsilon_{cu} = 2,6‰ + 35‰ \cdot [(90 - f_{ct})/100]^4$	(3.4)
Alongamento último das armaduras	
$\epsilon_{sa} = 10,0 \cdot 10^{-3} \text{ (10,0‰)}$	(3.5)

Linha neutra convencional (diagrama retangular)	
$y = \lambda \cdot x$	(3.6)
Coeficiente da posição da linha neutra para concretos até C50.	
$\lambda = 0,8$	(3.7)
Coeficiente da posição da linha neutra; concreto de C50 até C90	
$\lambda = 0,8 - (f_{ck} - 50)/400$	(3.8)
Tensão atuante no concreto admitida constante até a profundidade y, se a largura da seção não diminui acima da LN	
$\alpha_c \cdot f_{cd}$	(3.9)
Tensão atuante no concreto admitida constante até a profundidade y, se a largura da seção diminui acima da LN.	
$0,9 \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}$	(3.10)
Parâmetro de redução da tensão; concretos de classes até C50	
$\alpha_c = 0,85$	(3.11)
Parâmetro de redução da tensão; concretos de classes C50 até C90	
$\alpha_c = 0,85 \cdot [1,0 - (f_{ck} - 50)/200]$	(3.12)
Limite da posição da linha neutra para comportamento dúctil. Concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa	
$x/d \leq 0,45$	(3.13)
Limite da posição da linha neutra para comportamento dúctil. Concretos com $50$ MPa $< f_{ck} \leq 90$ MPa	
$x/d \leq 0,35$	(3.14)
Igualdade (equilíbrio) da força de compressão no concreto e tração no aço na flexão simples	
$F_t = F_c$	(3.15)
Momento em função da força no concreto	
$M_d = F_c \cdot z$	(3.16)
Momento em função da força no aço	
$M_d = F_t \cdot z$	(3.17)

Força resultante no concreto ( $f_{ck} \leq 50$ MPa) na flexão simples para seção retangular
$F_c = (0,85 \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) \cdot (0,8 \cdot x) \quad (3.18)$
Braço de alavanca na flexão simples para seção retangular e concreto com $f_{ck} \leq 50$ MPa
$z = d - 0,4 \cdot x \quad (3.19)$
Momento fletor em função da posição da linha neutra (seção retangular) e $f_{ck} \leq 50$ MPa
$M_d = b_w \cdot f_{cd} \cdot 0,68 \cdot x \cdot (d - 0,4 \cdot x) \quad (3.20)$
Expressão 3.20 modificada algebricamente
$M_d = (0,68 \cdot x \cdot d - 0,272 \cdot x^2) \cdot b_w \cdot f_{cd} \quad (3.21)$
Posição (profundidade) da linha neutra para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa
$x = \frac{0,68 \cdot d \pm \sqrt{(0,68d)^2 - 4 \cdot 0,272 \cdot \left(\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd}}\right)}}{0,544} \quad (3.22)$
Área necessária de aço para qualquer tensão na armadura
$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_s} \quad (3.23)$
Área necessária de aço para tensão de escoamento na armadura
$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_{yd}} \quad (3.24)$
Relação entre as deformações na fibra mais comprimida do concreto e no cg da armadura; relação entre a posição da linha neutra e a altura útil
$\frac{x}{\epsilon_c} = \frac{d}{\epsilon_c + \epsilon_s} \rightarrow \frac{x}{d} = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_s} \quad (3.25)$
Relação entre as deformações na fibra mais comprimida do concreto (até classe C50) e no cg da armadura, C50 no domínio 3
$\frac{x}{d} = \frac{0,0035}{0,0035 + \epsilon_s} \quad (3.26)$
Equilíbrio da força no concreto e no aço na flexão simples (mesma equação 3:15)
$F_s = F_c \quad (3.27)$

Momento em função da força no concreto (mesma equação 3.16)

$$M_d = F_c \cdot z \quad (3.28)$$

Momento em função da força no aço (mesma equação 3.17)

$$M_d = F_t \cdot z \quad (3.29)$$

Força resultante no concreto na flexão simples para seção retangular e concreto de qualquer classe

$$F_c = (\alpha_c \cdot f_{cd}) \cdot (b_w \cdot \lambda \cdot x) \quad (3.30)$$

Braço de alavanca na flexão simples para seção retangular e concreto de qualquer classe

$$z = d - 0,5 \cdot \lambda \cdot x \quad (3.31)$$

Momento fletor em função da posição da linha neutra para seção retangular e concreto de qualquer classe

$$M_d = b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot x \cdot (d - 0,5 \cdot \lambda \cdot x) \quad (3.32)$$

Expressão 3.32 modificada algebricamente

$$M_d = (\lambda \cdot x \cdot d - 0,5 \cdot \lambda^2 \cdot x^2) \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \quad (3.33)$$

Posição (profundidade) da linha neutra para concretos de qualquer classe

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2 \cdot \left( \frac{M_d}{b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}} \right)}}{\lambda} \quad (3.34)$$

Área de aço para tensão de escoamento (mesma 3.24)

$$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_{yd}} \quad (3.35)$$

Relação entre as deformações na fibra mais comprimida do concreto e no cg da armadura para concreto de qualquer classe no domínio 3

$$\frac{x}{d} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_s} \quad (3.36)$$

Límite da profundidade da linha neutra quando um momento for reduzido de  $M$  para  $\delta M$  em uma seção, para concretos com  $f_{cd} \leq 50$  MPa

$$x/d \leq (\delta - 0,44)/1,25 \quad (3.37)$$

Limite da profundidade da linha neutra quando um momento for reduzido de M para $\delta M$ em uma seção, para concretos com $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$
$x/d \leq (8 - 0,56)/1,25$ (3.38)
Força na armadura, conhecidas a área e a tensão de escoamento
$F_s = A_s \cdot f_{yd}$ (3.39)
Posição da linha neutra, conhecida a área de aço
$x = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,68 \cdot b_w \cdot f_{cd}}$ (3.40)
Momento fletor em função da força na armadura
$M_d = F_s \cdot z = F_s \cdot (d - 0,4 \cdot x) = A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - 0,4 \cdot x)$ (3.41)
Altura útil (d) em função da relação $\xi = x/d$
$d = \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd} \cdot (0,68 \cdot \xi - 0,272 \cdot \xi^2)}}$ (3.42)
Altura útil ( $d_{\min}$ ) em função da relação ( $\xi = 0,45$ ) para concretos com $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$
$d_{\min} = \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd} \cdot (0,68 \cdot 0,45 - 0,272 \cdot 0,45^2)}} = \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd} \cdot 0,25092}} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd}}}$ (3.43)
Equação adimensional do momento fletor
$KMD = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = 0,68 \cdot (KX) - 0,272 \cdot (KX)^2$ (3.44)
Equação adimensional do braço de alavanca
$KZ = z/d = 1 - 0,4 \cdot KX$ (3.45)
Cálculo da armadura em função de KZ
$A_s = \frac{M_d}{(KZ) \cdot d \cdot f_s}$ (3.46)

Equação adimensional da posição da linha neutra em função das deformações do concreto e do aço

$$KX = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_s} \quad (3.47)$$

Momento limite de uma seção retangular, com  $x_{lim} = 0,45d$ ; seções com armadura dupla

$$M_{lim} = (0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot 0,8 \cdot x_{lim}) \cdot (d - 0,4 \cdot x_{lim}) = 0,251 \cdot b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd} \quad (3.48)$$

Armadura necessária para resistir ao momento limite ( $A_{s1}$ ); seções com armadura dupla

$$A_{s1} = \frac{M_{lim}}{z \cdot f_{yd}} = \frac{M_{lim}}{(d - 0,4 \cdot x_{lim}) \cdot f_{yd}} = \frac{M_{lim}}{[1 - 0,4 \cdot (KX)_{lim}] \cdot d \cdot f_{yd}} \quad (3.49)$$

Armadura necessária para resistir à diferença entre o momento limite e o atuante ( $A_{s2}$ ); seções com armadura dupla

$$A_{s2} = \frac{M_2}{(d - d') \cdot f_{yd}} = \frac{M_d - M_{lim}}{(d - d') \cdot f_{yd}} \quad (3.50)$$

Armadura total ( $A_s$ ) tracionada em seções com armadura dupla

$$A_s = \frac{M_{lim}}{[1 - 0,4 \cdot (KX)_{lim}] \cdot d \cdot f_{yd}} + \frac{M_d - M_{lim}}{(d - d') \cdot f_{yd}} \quad (3.51)$$

Armadura comprimida ( $A_s$ ) em seções com armadura dupla

$$A_s = \frac{M_2}{(d - d') \cdot f_c} \rightarrow A_s = \frac{M_d - M_{lim}}{(d - d') \cdot f_c} \quad (3.52)$$

Deformação específica da armadura comprimida em seções com armadura dupla

$$\frac{0,35}{x_{lim}} = \frac{\epsilon_s}{(x_{lim} - d')} \rightarrow \epsilon_s = \frac{0,35 \cdot (x_{lim} - d')}{x_{lim}} \quad (3.53)$$

Momento ( $M_1$ ) resistido pelas abas de uma seção "T"

$$M_1 = F_{c1} \cdot \left( d - \frac{h_c}{2} \right) = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot h_f \cdot (b_f - b_w) \cdot \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \quad (3.54)$$

Momento ( $M_2$ ) resistido pela alma de uma seção "T"

$$M_2 = M_d - M_1 = F_{c2} \cdot \left( d - \frac{y}{2} \right) \quad (3.55)$$

Armadura necessária para resistir ao momento total ( $M_d$ ) em uma seção "T"

$$A_s = \frac{M_1}{(d - h_f / 2) \cdot f_{yd}} + \frac{M_2}{(KZ) \cdot d \cdot f_{yd}} \quad (3.56)$$

Distância  $a$  para determinação da largura colaborante em seções "T"

$$\begin{aligned} a &= \ell \text{ (viga simplesmente apoiada);} \\ a &= 0,75 \cdot \ell \text{ (tramo com momento em uma só extremidade);} \\ a &= 0,60 \cdot \ell \text{ (tramo com momentos nas duas extremidades);} \\ a &= 2 \cdot \ell \text{ (tramo em balanço).} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Limites de  $b_1$  e  $b_3$  para determinação de largura colaborante em seções "T"

$$b_1 \leq \begin{cases} 0,5 \cdot b_2 \\ 0,10 \cdot a \end{cases} \quad b_3 \leq \begin{cases} b_4 \\ 0,10 \cdot a \end{cases} \quad (3.58)$$

## ADENDO B

Quadro de KMD para cálculo de armadura longitudinal de seções retangulares para concretos de quaisquer classes.

- para  $f_{ck} \leq 50$  MPa:

$$\lambda = 0,8 \text{ e } \alpha_c = 0,85$$

- para  $f_{ck} > 50$  MPa:

$$\lambda = 0,8 - (f_{ck} - 50)/400 \text{ e } \alpha_c = 0,85 \cdot [1,0 - (f_{ck} - 50)/200] \text{ (} f_{ck} \text{ em MPa)}$$

$$KMD = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} \quad k_x = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot KMD}{\alpha_c}}}{\lambda} \quad k_x = \left(1 - \frac{\lambda}{2} \cdot k_{ox}\right) \quad A_s = \frac{M_d}{(KZ) \cdot d \cdot f_{yd}}$$

$f_{ck}$ (MPa)	50	60	70	80	90					
$\lambda$	0,8	0,775	0,75	0,725	0,7					
$\alpha_c$	0,85	0,8075	0,765	0,7225	0,68					
0,010	0,015	0,994	0,016	0,994	0,018	0,993	0,019	0,993	0,021	0,993
0,015	0,022	0,991	0,024	0,991	0,026	0,990	0,029	0,990	0,032	0,989
0,020	0,030	0,988	0,032	0,987	0,035	0,987	0,039	0,986	0,043	0,985

$f_c$ (MPa)	50	60	70	80	90					
$\lambda$	0,8	0,775	0,75	0,725	0,7					
$\alpha_c$	0,85	0,8075	0,765	0,7225	0,68					
0,025	0,037	0,985	0,041	0,984	0,044	0,983	0,049	0,982	0,054	0,981
0,030	0,045	0,982	0,049	0,981	0,053	0,980	0,059	0,979	0,064	0,977
0,035	0,053	0,979	0,057	0,978	0,062	0,977	0,069	0,975	0,076	0,974
0,040	0,060	0,976	0,066	0,975	0,072	0,973	0,079	0,972	0,087	0,970
0,045	0,068	0,973	0,074	0,971	0,081	0,970	0,089	0,968	0,098	0,966
0,050	0,076	0,970	0,083	0,968	0,090	0,966	0,099	0,964	0,109	0,962
0,055	0,084	0,967	0,091	0,965	0,100	0,963	0,109	0,960	0,121	0,958
0,060	0,092	0,963	0,100	0,961	0,109	0,959	0,120	0,957	0,132	0,954
0,065	0,100	0,960	0,108	0,958	0,119	0,956	0,130	0,953	0,144	0,950
0,070	0,108	0,957	0,117	0,955	0,128	0,952	0,141	0,949	0,156	0,946
0,075	0,116	0,954	0,126	0,951	0,138	0,948	0,152	0,945	0,167	0,941
0,080	0,124	0,950	0,135	0,948	0,148	0,945	0,162	0,941	0,179	0,937
0,085	0,132	0,947	0,144	0,944	0,157	0,941	0,173	0,937	0,191	0,933
0,090	0,140	0,944	0,153	0,941	0,167	0,937	0,184	0,933	0,204	0,929
0,095	0,149	0,941	0,162	0,937	0,177	0,933	0,195	0,929	0,216	0,924
0,100	0,157	0,937	0,171	0,934	0,187	0,930	0,206	0,925	0,228	0,920
0,105	0,165	0,934	0,180	0,930	0,198	0,926	0,218	0,921	0,241	0,916
0,110	0,174	0,930	0,190	0,926	0,208	0,922	0,229	0,917	0,254	0,911
0,115	0,182	0,927	0,199	0,923	0,218	0,918	0,241	0,913	0,266	0,907
0,120	0,191	0,924	0,209	0,919	0,229	0,914	0,252	0,909	0,279	0,902
0,125	0,200	0,920	0,218	0,915	0,239	0,910	0,264	0,904	0,293	0,898
0,130	0,209	0,917	0,228	0,912	0,250	0,906	0,276	0,900	0,306	0,893
0,135	0,217	0,913	0,238	0,908	0,261	0,902	0,288	0,896	0,319	0,888
0,140	0,226	0,909	0,247	0,904	0,272	0,898	0,300	0,891	0,333	0,883
0,145	0,235	0,906	0,257	0,900	0,283	0,894	0,312	0,887	0,347	0,879
0,150	0,245	0,902	0,267	0,896	0,294	0,890	0,325	0,882		

$f_{ck}$ (MPa)	50	60	70	80	90			
$\lambda$	0,8	0,775	0,75	0,725	0,7			
$\alpha_c$	0,85	0,8075	0,765	0,7225	0,68			
0,155	0,254	0,899	0,278	0,892	0,305	0,886	0,337	0,878
0,160	0,263	0,895	0,288	0,888	0,316	0,881	0,350	0,873
0,165	0,272	0,891	0,298	0,884	0,328	0,877		
0,170	0,282	0,887	0,309	0,880	0,340	0,873		
0,175	0,291	0,883	0,319	0,876				
0,180	0,301	0,880	0,330	0,872				
0,185	0,311	0,876	0,341	0,868				
0,190	0,320	0,872						
0,195	0,330	0,868						
0,200	0,340	0,864						
0,205	0,351	0,860						
0,210	0,361	0,856						
0,215	0,371	0,851						
0,220	0,382	0,847						
0,225	0,393	0,843						
0,230	0,403	0,839						
0,235	0,414	0,834						
0,240	0,425	0,830						
0,245	0,437	0,825						
0,250	0,448	0,821						



## CAPÍTULO 4

# DETALHAMENTO DA ARMADURA LONGITUDINAL (FLEXÃO) NA SEÇÃO TRANSVERSAL E ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO

### 4.1 INTRODUÇÃO

Em uma viga de concreto armado, conhecendo-se o diagrama de momentos fletores, as dimensões da seção transversal e as características mecânicas do concreto e do aço, é possível determinar a armadura longitudinal necessária em cada seção.

A maneira de calcular essa armadura, no estado limite último, foi discutida no capítulo anterior, e a questão agora é: deve-se calcular a armadura em todas as seções transversais? A resposta é não. Normalmente, basta calcular a área da armadura nas seções de momentos extremos (positivo e negativo) para cada tramo; momento fletor positivo é aquele que produz tensão de tração na borda inferior da seção.

A partir da definição da disposição das barras nessas seções, pode-se, com maior ou menor aproximação, detalhar a armadura ao longo da viga, o que garantirá que todas as seções tenham quantidade de aço suficiente, o que será feito no capítulo 5.

Para efetuar o detalhamento da armadura na seção transversal é preciso, primeiramente, escolher, a partir da área de aço calculada, a quantidade de barras longitudinais necessárias em função da área da seção transversal de uma barra. O Quadro 4.1 contém características das barras com bitolas comerciais mais empregadas em concreto armado. Destaca-se que os fios são menos rígidos que as barras.

Quadro 4.1 Características das barras de aço.

Fios	Barras $\phi$ (mm)	Diâmetro (cm)	Peso (daN/m - kgf/m)	Perímetro (cm)	Área (cm <sup>2</sup> )
3,2	-	0,32	0,063	1,00	0,080
4,0	-	0,40	0,100	1,25	0,125
5,5	5,5	0,55	0,186	1,73	0,240
6,3	6,3 (1/4")	0,63	0,248	2,00	0,315
8,0	8,0 (5/16")	0,80	0,393	2,50	0,500
10,0	10,0 (3/8")	1,0	0,624	3,15	0,800

Quadro 4.1 Continuação...

Fios	Barras $\phi$ (mm)	Diâmetro (cm)	Peso (daN/m – kgf/m)	Perímetro (cm)	Área (cm <sup>2</sup> )
-	12,5 (1/2")	1,25	0,988	4,00	1,250
-	16,0 (5/8")	1,60	1,570	5,00	2,000
-	20,0 (3/4")	2,0	2,480	6,30	3,150
-	22,5 (7/8")	2,25	3,120	7,10	4,000
-	25,0 (1")	2,50	3,930	8,00	5,000
-	32,0 (1,25")	3,20	6,240	10,0	8,000

A quantidade de barras e seu arranjo (posição dentro da seção transversal da viga) devem atender às prescrições da ABNT NBR 6118:2014, que são descritas nos itens seguintes. Além dessas prescrições, os projetistas devem ter em mente as operações de lançamento e adensamento do concreto, de modo a permitir que ele penetre com facilidade em todos os vazios da viga, bem como assegurar que haja espaço para que as agulhas de vibradores possam ser introduzidas entre as barras.

O engenheiro da obra, responsável pela operação de concretagem, deve sempre tomar alguns cuidados a fim de que, durante a concretagem, as propriedades essenciais sejam asseguradas. Entre essas propriedades destacam-se a aderência entre o aço e o concreto, a homogeneidade do concreto (sem ninhos de concretagem – regiões só com pedras, ou seja, com pouca ou nenhuma nata de cimento) e o cobrimento mínimo da armadura. Recomenda-se para tanto a leitura das seções 9 e 10 da ABNT NBR 14931:2003 (Execução de estruturas de concreto – procedimento) que tratam de aspectos referentes à concretagem, fôrmas, escoramentos, adensamento, cura etc.

Neste capítulo estão todas as prescrições que devem ser atendidas ao se detalhar a armadura na seção transversal. Para seções com pouca armadura, por exemplo, com armadura mínima, várias das prescrições estão automaticamente verificadas. Assim, a importância da utilização cuidadosa dessas prescrições aumenta à medida que a seção é mais solicitada.

Além de garantir a segurança contra o colapso, como visto no capítulo anterior (em relação à flexão), é preciso garantir que a estrutura de concreto armado atenda aos estados limites de serviço, que segundo o item 10.4 da ABNT NBR 6118:2014 "são aqueles relacionados ao conforto do usuário e à durabilidade, aparência e boa utilização das estruturas, seja em relação aos usuários, seja em relação às máquinas e aos equipamentos suportados pelas estruturas".

Entre eles, destacam-se os estados limites de formação de fissuras, de abertura de fissuras e os de deformações excessivas, ou seja, a estrutura não deve apresentar, em utilização, fissuração ou deformação além de determinados limites. Como a quantidade e o detalhamento das barras na seção transversal influem nessas condições, nas seções 4.7 e 4.8 são abordados os estados limites referentes à fissuração inaceitável e à deformação excessiva, respectivamente.

As situações aqui abordadas referem-se à flexão, mas os conceitos devem ser entendidos para os casos de esforços de cisalhamento devidos à força cortante e à torção.

## 4.2 ARMADURA LONGITUDINAL MÍNIMA É MÁXIMA EM UMA SEÇÃO

As quantidades mínima e máxima da armadura de flexão em uma seção devem ser previstas. A armadura mínima deve ser colocada para evitar rupturas bruscas (frágeis) da seção, pois o aço faz com que ela apresente uma deformação razoável antes de entrar em ruína. Também é útil para absorver pequenos esforços não considerados no cálculo. A especificação de valores máximos decorre da necessidade de assegurar condições de ductilidade e de respeitar o campo de validade dos ensaios que deram origem às prescrições de funcionamento do conjunto aço-concreto.

Na ABNT NBR 6118:2014, as recomendações se encontram no item 17.3.5, que contém indicações sobre as quantidades mínima e máxima que devem ser respeitadas.

### 4.2.1 ARMADURA MÍNIMA

Conforme o item 17.3.5.1 da norma:

A ruptura frágil das seções transversais, quando da formação da primeira fissura, deve ser evitada considerando-se, para o cálculo das armaduras, um momento mínimo dado pelo valor correspondente ao que produziria a ruptura da seção de concreto simples, supondo que a resistência à tração do concreto seja dada por  $f_{ctk, sup}$ , devendo também obedecer às condições relativas ao controle da abertura de fissuras dadas em 17.3.3 (seção 4.7 deste capítulo).

A armadura mínima de tração em uma viga, ou em qualquer outro elemento estrutural de concreto armado ou protendido, deve ser determinada dimensionando-se a seção para um momento fletor mínimo dado pela expressão seguinte, respeitando sempre uma taxa mínima absoluta de 0,15% (item 17.3.5.2.1 da norma):

$$M_{d, min} = 0,8 \cdot W_0 \cdot f_{ctk, sup} \quad (4.1)$$

em que:

$W_0$  – módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto relativo à fibra mais tracionada;

$f_{ctk, sup}$  – resistência característica superior do concreto à tração (ver capítulo 1, seção 1.6.2.3, equações 1.5 e 1.7).

O dimensionamento para  $M_{d, min}$  será considerado atendido se forem respeitadas as taxas mínimas de armadura ( $\rho_{min}$ ) do Quadro 4.2 (Quadro 17.3 da norma);  $A_c$  é a área bruta da seção de concreto.

Quadro 4.2 Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas.

Forma da seção	Valores de $\rho_{min}^{(1)}$ ( $A_{s, min}/A_c$ ) %														
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Retangular	0,150	0,150	0,150	0,164	0,179	0,194	0,208	0,211	0,219	0,226	0,233	0,239	0,245	0,251	0,256

<sup>(1)</sup> Os valores de  $\delta_{s, min}$  estabelecidos neste quadro pressupõem o uso de aço CA50;  $d/h = 0,8$  e  $\gamma_c = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ . Caso esses fatores sejam diferentes,  $\rho_{min}$  deve ser recalculado.

#### 4.2.2 ARMADURA MÁXIMA

A soma das armaduras de tração e compressão ( $A_s + A_c$ ) não deve ter valor maior que 4% da área de concreto da seção ( $A_c$ ), calculada em região fora da zona de emendas (item 17.3.5.2.4 da norma).

#### 4.3 ARMADURA CONCENTRADA

Para que a armadura longitudinal, comprimida ou tracionada, possa ser calculada admitindo-a concentrada em seu centro de gravidade, a ABNT NBR 6118:2014, item 17.2.4.1, estabelece que a distância ( $a$ ) desse centro ao ponto da seção da armadura mais afastado da linha neutra, medida normalmente a esta, deve ser menor que 10% de  $h$ .

A teoria desenvolvida no capítulo 3 considerou que a armadura longitudinal estaria concentrada no seu centro de gravidade, em um único nível, portanto com  $a < 0,10 h$  (Figura 4.1). Se isso não for possível, deve-se considerar a deformação específica do aço de cada nível, como indicado na Figura 4.1. Se a deformação específica da armadura mais próxima da linha neutra for igual ou superior a  $\epsilon_{yd}$ , o cálculo feito no capítulo 3 é válido; supõe-se que isso ocorre quando a consideração de armadura concentrada é atendida, mas é preciso também que a armadura mais afastada do centro de gravidade e da linha neutra tenha deformação inferior a 1%; caso contrário, o cálculo passa a ser iterativo (camada por camada). Note a diferença entre o texto da norma e a Figura 4.1 em relação à distância  $a$ , colocada em posição contrária ao prescrito, mas parecendo ser o mais lógico.

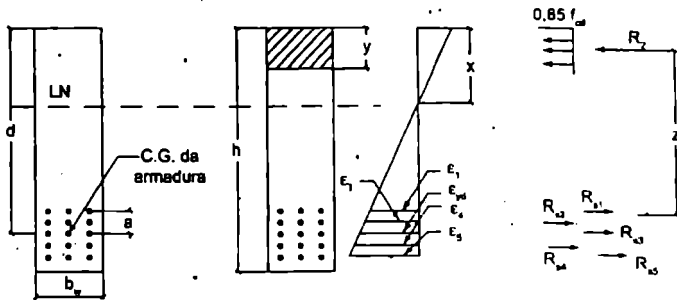


Figura 4.1 Armadura considerada concentrada.

#### 4.4 ARMADURA DE PELE

A função dessa armadura é, principalmente, minimizar os problemas decorrentes da fissuração, retração e variação de temperatura. Serve também para diminuir a abertura de fissuras de flexão na alma das vigas.

Na ABNT NBR 6118:2014, as recomendações encontram-se no item 17.3.5.2.3. A armadura de pele (armadura lateral) deve ser colocada em cada face da alma da viga, com área, em cada face, não menor que a dada pela equação 4.2, em que  $A_{c,alma}$  é a área de concreto da alma da viga.

$$A_{s,pele} = 0,10\% \text{ de } A_{c,alma} = \frac{0,10}{100} \cdot A_{c,alma} \quad (4.2)$$

A armadura de pele deve ser composta de barras de CA50 ou CA60, não sendo necessária uma armadura superior a  $5 \text{ cm}^2/\text{m}$  por face.

No item 18.3.5, indica-se que a armadura de pele, calculada de acordo com 17.3.5.2.3, deve ser disposta de modo que o afastamento entre as barras não ultrapasse, além de 20 cm, também a  $d/3$ . Ainda de acordo com o item 17.3.3.2, é conveniente que o espaçamento, na zona tracionada da viga, seja menor ou igual a  $15 \phi$ .

Em vigas que tenham altura igual ou inferior a 60 cm, não é necessária a colocação dessa armadura. Essas indicações estão resumidas na Figura 4.2.

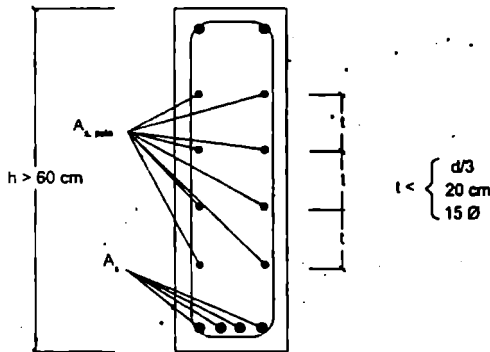


Figura 4.2 Distribuição da armadura de pele.

#### 4.5 ESPAÇAMENTOS ENTRE AS BARRAS

O arranjo das armaduras deve propiciar que elas cumpram sua função estrutural (aderência, manutenção da altura útil etc.) e proporcionar condições adequadas de execução, principalmente com relação ao lançamento e ao adensamento do concreto. Os espaços entre as barras longitudinais devem ser projetados para possibilitar a introdução de vibradores, evitando que ocorram vazios e segregação dos agregados. Para isso, devem ser respeitadas as distâncias mínimas entre as barras, constantes na ABNT NBR 6118:2014, item 18.3.2.2.

O espaçamento mínimo livre entre as faces das barras, medido horizontal ( $a_h$ ) e verticalmente ( $a_v$ ) no plano da seção transversal, deve ser, em cada direção, o maior entre os três valores seguintes, também indicados na Figura 4.3, em que  $d_{\text{máx, agregado}}$  é a dimensão máxima característica do agregado graúdo.

$$a_h \geq \begin{cases} 20 \text{ mm} \\ \text{diâmetro da barra, do feixe ou da luva} \\ 1,2 \cdot d_{\text{máx, agregado}} \end{cases} \quad a_v \geq \begin{cases} 20 \text{ mm} \\ \text{diâmetro da barra, do feixe ou da luva} \\ 0,5 \cdot d_{\text{máx, agregado}} \end{cases}$$

Nas barras com mossas ou saliências, segundo Fusco,<sup>16</sup> deve-se acrescentar ao diâmetro das mesmas o valor  $0,04 \cdot \phi$ , ou seja,  $\phi_{\text{barra}} = \phi + 0,04 \cdot \phi$ . Para feixes de barras, deve-se considerar, como diâmetro do feixe,  $\phi_n = \phi \cdot \sqrt{n}$ , sendo  $n$  o número de barras do feixe de diâmetro  $\phi$  cada uma.

Os valores mínimos de espaçamentos devem ser obedecidos também em regiões em que houver emendas por traspasse das barras. As emendas serão tratadas na seção 5.4 do capítulo 5.

16 Fusco (1995).

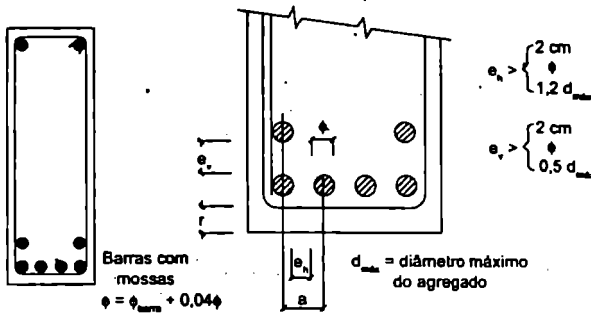


Figura 4.3 Espaçamentos entre barras (valores mínimos).

O diâmetro máximo do agregado ( $d_{m\acute{a}x, agregado}$ ) pode ser obtido no Quadro 4.3, que fornece o intervalo de valores em que eles estão compreendidos, para cada tipo de brita, conforme classificação usual. Os valores do Quadro 4.3 podem variar dependendo da região do Brasil ou mesmo da referência a valores específicos feita por órgãos governamentais.

Quadro 4.3 Classificação usual das britas.

Tipo de brita	Diâmetro (mm)
Brita 0	4,8 a 9,5
Brita 1	9,5 a 19
Brita 2	19 a 25
Brita 3	25 a 38

## 4.6 PROTEÇÃO E COBRIMENTO

Entre os fatores dos quais depende a durabilidade das estruturas de concreto armado e protendido, são fundamentais a qualidade e a espessura do concreto de cobrimento das armaduras. Cobrimento mínimo é a menor distância livre entre uma face da peça e a camada de barras mais próxima dessa face (inclusive estribos), e deve ser observado ao longo de todo o elemento considerado; tem por finalidade proteger as barras tanto da corrosão como da ação do fogo. Para isso, além do cobrimento adequado, é importante que o concreto seja bem compactado. Na ABNT NBR 6118:2014, as recomendações estão no item 7.4.7.

O cobrimento mínimo ( $C_{mín}$ ), item 7.4.7.2, deve ser garantido adotando-se um valor nominal de cobrimento ( $C_{nom}$ ), que é o cobrimento mínimo acrescido de uma tolerância de execução ( $\Delta C$ ) ( $C_{mín} = C_{nom} + \Delta C$ ). Para isso, as dimensões das armaduras e os espaçadores devem respeitar os cobrimentos nominais, conforme o Quadro 4.4

(Tabela 7.2 da norma, da qual foram retirados os valores correspondentes ao concreto protendido), para  $\Delta C = 10$  mm (ou seja,  $C_{nom} = C_{min} + 10$  mm); em obras correntes, conforme o item 7.4.7.3, o valor de  $\Delta C$  deve ser maior ou igual a 10 mm.

Nos casos em que houver um rigoroso controle de qualidade e rígidos limites de tolerância da variabilidade das medidas durante a execução (o que deve estar explícito nos desenhos de projeto), de acordo com o item 7.4.7.4 pode-se ter  $\Delta C = 5$  mm. Assim, os cobrimentos nominais do Quadro 4.4 podem ser reduzidos em 5 mm.

De acordo com o item 7.4.7.5, os cobrimentos nominais e mínimos devem ser sempre referidos à superfície da armadura externa, em geral a face externa do estribo. Para concreto armado, o cobrimento nominal de uma determinada barra deve ser sempre maior que o seu diâmetro ( $C_{nom} \geq \phi_{barra}$ ), e, no caso de feixes, maior que o diâmetro equivalente ( $C_{nom} \geq \phi_{feixe} = \phi_n = \phi \cdot \sqrt{n}$ ). A dimensão máxima característica do agregado graúdo (item 7.4.7.6), utilizado no concreto, não pode ser maior que 20% da espessura nominal do cobrimento ( $d_{max} \leq 1,2 \cdot C_{nom}$ ).

O valor do cobrimento está intimamente ligado à durabilidade da estrutura e, consequentemente, à agressividade do meio ambiente, conforme visto na seção 1.10 do capítulo 1, com as classes de agressividade definidas nos quadros 1.8 e 1.9.

**Quadro 4.4** Correspondência entre classe de agressividade ambiental e cobrimento nominal para  $\Delta C = 10$  mm e estruturas de concreto armado.

Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (Quadro 6.1)			
	I	II	III	IV <sup>(b)</sup>
	Cobrimento nominal (mm)			
Laje <sup>(a)</sup>	20	25	35	45
Viga/pilar	25	30	40	50
Elementos estruturais em contato com o solo <sup>(c)</sup>	30		40	50

a) Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos, pisos asfálticos e outros, as exigências deste quadro podem ser substituídas por  $C_{nom} \geq \phi_{barra}$ , respeitado um cobrimento nominal  $\geq 15$  mm.

b) Nas superfícies expostas a ambientes agressivos, como reservatórios, estações de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canaletas de efluentes e outras obras em ambientes química e intensamente agressivos, devem ser atendidos os cobrimentos da classe de agressividade IV.

c) No trecho dos pilares em contato com o solo junto aos elementos de fundação, a armadura deve ter cobrimento nominal  $\geq 45$  mm.

Para concretos de classe de resistência superior ao mínimo exigido, os cobrimentos definidos no Quadro 4.4 podem ser reduzidos em até 5 mm.

As vigotas pré-moldadas, para execução de lajes nervuradas, podem ter o cobrimento nominal reduzido em 5 mm, pois são executadas em fábricas, com um controle que pode ser considerado rigoroso.

## 4.7 ANÁLISE DA FISSURAÇÃO EM PEÇAS DE CONCRETO ARMADO

A fissuração excessiva de uma peça em concreto armado pode comprometer significativamente sua durabilidade. Embora não seja a única causa, ou condição necessária, pode-se dizer que, quando de sua ocorrência, há grande risco de haver uma degradação rápida do concreto superficial e da armadura. Outros fatores, como porosidade do concreto, cobrimento insuficiente da armadura, presença de produtos químicos, agentes agressivos etc., contribuem ou podem ser determinantes para a durabilidade da estrutura. Examinados esses fatores, o projetista deve evitar que a peça sofra fissuração excessiva devida à flexão, detalhando adequadamente a armadura na seção transversal, e, se for o caso, aumentando-a.

Nesse caso, trata-se de uma verificação de estado limite de serviço, ou seja, interessa saber a fissuração que ocorrerá na peça quando esta estiver em utilização e não próxima a atingir o colapso. São dois os estados limites referentes à fissuração: estado limite de formação de fissuras (ELS-F), que é a situação em que se inicia a formação de fissuras; e estado limite de abertura de fissuras (ELS-W), que é a situação em que as fissuras se apresentam com aberturas iguais aos máximos especificados. Nas estruturas usuais de concreto armado, tem interesse maior este último.

Na ABNT NBR 6118:2014, o controle da fissuração é apresentado no item 13.4, e o estado limite de fissuração no item 17.3.3. Serão apresentadas apenas as recomendações que importam às estruturas de concreto armado, embora haja, também, referências às de concreto protendido.

### 4.7.1 ABERTURA MÁXIMA DE FISSURAS

Deve-se garantir, com razoável probabilidade, que as aberturas das fissuras fiquem dentro de limites que não comprometam as condições de serviço e a durabilidade da estrutura. As aberturas, dentro desses limites, geralmente não causam perda de segurança no estado limite último.

Fissuras são inevitáveis em estruturas de concreto em que existam tensões de tração resultantes de carregamento direto ou por restrição a deformações impostas. Podem ainda ocorrer por outras causas, como retração plástica ou térmica e expansão devida às reações químicas internas do concreto nas primeiras idades. Essas aberturas podem representar um estado de fissuração inaceitável.

As fissuras devem ser evitadas ou limitadas por meio de cuidados tecnológicos, especialmente na definição do traço do concreto e nos cuidados de cura do mesmo.

De maneira geral, em estruturas bem projetadas e construídas e sob cargas especificadas na normalização (com combinação de ações frequente), quando as fissuras apresentarem aberturas que respeitem os limites do item 13.4.2 da ABNT NBR 6118:2014 (dados no Quadro 4.5, adaptação da Tabela 13.4 da norma) não haverá perda de durabilidade ou perda de segurança quanto aos estados limites últimos.

**Quadro 4.5** Abertura máxima das fissuras características ( $w_k$ ) para elementos de concreto armado, ELS-W, combinação frequente, em função da classe de agressividade.

Classe de agressividade ambiental (ver Quadro 1.7)			
I	II	III	IV
$w_k \leq 0,4$ mm	$w_k \leq 0,3$ mm	$w_k \leq 0,3$ mm	$w_k \leq 0,2$ mm

As aberturas  $w_k$  do Quadro 4.5 referem-se a valores característicos limites para garantir proteção adequada das armaduras quanto à corrosão. Não se deve esperar, no entanto, que as aberturas reais de fissuras correspondam estritamente aos valores indicados, isto é, fissuras reais podem eventualmente ultrapassar estes limites.

A combinação frequente de serviço, conforme visto no capítulo 1, seção 1.8.5, para verificação de abertura de fissuras para prédios residenciais, será feita, em geral, considerando:

$$F_{d,\text{serviço}} = \Sigma F_{gk} + 0,4 \cdot F_{qk} \quad (4.3)$$

#### 4.7.2 CONTROLE DA FISSURAÇÃO PELA LIMITAÇÃO DA ABERTURA ESTIMADA DAS FISSURAS

No item 17.3.3 da norma estão estabelecidos os critérios para a verificação dos valores limites da abertura de fissuras, dados no Quadro 4.5, para peças lineares, analisadas isoladamente, e submetidas à combinação de ações definidas no seu item 11.8 (seção 1.8.5 do capítulo 1).

A avaliação dos valores das aberturas de fissuras, na verificação do estado limite (item 17.3.3.2 da norma), é feita para cada elemento ou grupo de elementos das armaduras passiva e ativa aderente que controlam a fissuração da peça, considerando-se uma área  $A_c$  do concreto de envolvimento constituída por um retângulo cujos lados não distam mais de  $7,5 \cdot \phi$  do eixo da barra da armadura (Figura 4.4).

É conveniente que toda a "pele" (região próxima à superfície) da viga na sua zona tracionada tenha armaduras que limitem a abertura de fissuras na região  $A_{c,el}$  considerada, conforme indicado na Figura 4.4, com espaçamento não superior a  $15 \phi$ .

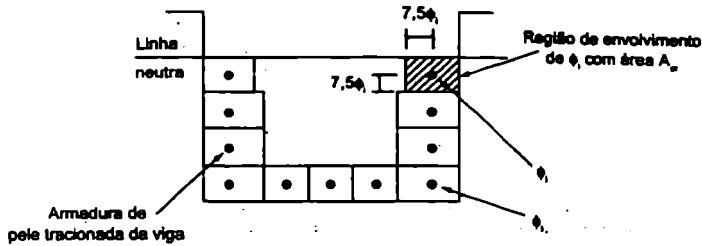


Figura 4.4 Concreto de envolvimento da armadura, conforme Figura 17.3 da ABNT NBR 6118:2014.

O tamanho da abertura de fissuras ( $w$ ) determinado para cada parte da região de envolvimento será o menor entre os obtidos pelas duas expressões a seguir, com  $\sigma_{si}$ ,  $\phi_i$ ,  $E_{si}$ ,  $\rho_n$  definidos para cada área de envolvimento:

$$w = \text{menor entre} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi_i \cdot \sigma_{si}}{12,5 \cdot \eta_i} \cdot \frac{3 \cdot \sigma_{si}}{E_{si} \cdot f_{\alpha,m}} \end{array} \right. \quad (4.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\phi_i}{(12,5 \cdot \eta_i)} \cdot \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \cdot \left( \frac{4}{\rho_n} + 45 \right) \end{array} \right. \quad (4.5)$$

sendo:

- $A_{env}$  - área da região de envolvimento protegida pela barra  $\phi_i$ ;
- $E_{si}$  - módulo de elasticidade do aço da barra  $\phi_i$  considerada;
- $\phi_i$  - diâmetro da barra que protege a região de envolvimento considerada;
- $\rho_n$  - taxa de armadura passiva ou ativa aderente (que não esteja dentro de bainha) em relação à área da região de envolvimento ( $A_{env}$ );
- $\eta_i$  - coeficiente de conformação superficial  $\eta_i$  da armadura passiva considerada;<sup>(1)</sup>
- $f_{\alpha,m}$  - resistência média do concreto à tração;<sup>(2)</sup>
- $\sigma_{si}$  - tensão de tração no centro de gravidade da armadura considerada, calculada no estágio II.<sup>(3)</sup>

Notas: 1. O coeficiente  $\eta_i$  que mede a conformação superficial é dado no item 9.3.2.1 da norma, e vale 1,0 para barras lisas (CA25), 1,4 para barras entalhadas (CA60) e 2,25 para barras (nervuradas) de alta aderência (CA50).

2.  $f_{\alpha,m}$  é definido no item 8.2.5 da norma (ver capítulo 1, seção 1.6.2.3, equação 1.6).

3. O cálculo no estágio II (que admite comportamento linear dos materiais e despreza a resistência à tração do concreto) pode ser feito considerando  $\alpha_c = 15$  (relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto).

Para evitar o cálculo no estágio II, pode-se, a favor da segurança, considerar de maneira simplificada que a tensão na armadura seja dada por uma variação linear:

$$\sigma_{st} = \frac{f_{yd} \cdot g_1 + g_2 + 0,4 \cdot q}{1,4 \cdot g_1 + g_2 + q} = \frac{f_{yk} \cdot g_1 + g_2 + 0,4 \cdot q}{1,4 \cdot 1,15 \cdot g_1 + g_2 + q} \quad (4.6)$$

Nas vigas usuais, com altura menor que 1,2 m, pode-se considerar atendida a condição de abertura de fissuras em toda a pele tracionada se a abertura de fissuras calculada na região das barras mais tracionadas for verificada e houver uma armadura lateral de pele que atenda o item 17.3.5.2.3 da ABNT NBR 6118:2014 (seção 4.4 deste capítulo).

#### 4.7.3 CONTROLE DA FISSURAÇÃO SEM A VERIFICAÇÃO DA ABERTURA DE FISSURAS

A peça atenderá ao estado limite de fissuração (aberturas máximas esperadas da ordem de 0,3 mm para o concreto armado) sem a avaliação da grandeza da abertura da fissura (item 17.3.3.3 da ABNT NBR 6118:2014), quando forem atendidas as exigências de armadura mínima e de cobrimento determinadas pela norma (seções 4.2 e 4.6 deste capítulo, respectivamente) e as restrições do Quadro 4.6 (Tabela 17.2 da ABNT NBR 6118:2014) quanto ao diâmetro máximo ( $\phi_{máx}$ ) e ao espaçamento máximo ( $s_{máx}$ ). A tensão  $\sigma_{st}$  deverá ser determinada no estágio II.

Quadro 4.6 Valores máximos de diâmetro e espaçamento com barras de alta aderência.

Tensão na barra	Concreto sem armaduras ativas	
	$\phi_{máx}$ (mm)	$s_{máx}$ (cm)
160	32	30
200	25	25
240	20	20
280	16	15
320	12,5	10
360	10	5
400	8	

## 4.8 VERIFICAÇÃO DO ESTADO LIMITE DE DEFORMAÇÃO EXCESSIVA

Estado limite de deformações excessivas, segundo o item 3.2.4 da ABNT NBR 6118:2014, é o estado em que as deformações, calculadas segundo o item 17.3.2, atingem os limites estabelecidos para a utilização normal da construção, dados no item 13.3.

Para a verificação dos estados limites de deformações excessivas, devem ser analisadas, além das combinações de ações a ser empregadas, as características geométricas das seções, os efeitos da fissuração e fluência do concreto e as flechas limites, estas diretamente ligadas à destinação ou tipo do elemento estrutural.

Conforme adiantado no item 2.8 do capítulo 2, na ABNT NBR 6118:2014 não há altura útil a partir da qual é dispensado o cálculo dos deslocamentos, ou seja, sempre é necessário avaliar as flechas nos elementos estruturais.

A verificação dos valores do estado limite de deformação na ABNT NBR 6118:2014 está no item 17.3.2, que estabelece critérios para a verificação dos valores limites para a deformação da estrutura, mais especificamente rotações e deslocamentos em peças lineares, analisadas isoladamente e submetidas à combinação de serviço das ações (seção 1.8.5.2 do capítulo 1). Os valores limites são aqueles prescritos no item 13.3 da ABNT NBR 6118:2014, indicados a seguir na seção 4.8.1.

Os valores dos deslocamentos e rotações deverão ser determinados por meio de modelos que considerem a rigidez efetiva das seções da peça estrutural, ou seja, levem em consideração a presença da armadura, a existência de fissuras no concreto ao longo dessa armadura e as deformações diferidas no tempo.

A deformação real da estrutura depende também do processo construtivo e das propriedades dos materiais (principalmente do módulo de elasticidade e da resistência à tração) no momento de sua solicitação. Em face da grande variabilidade desses parâmetros, existe uma grande variabilidade das deformações reais. Não é razoável esperar, portanto, grande precisão nas previsões de deslocamentos dadas por processos analíticos.

### 4.8.1 DESLOCAMENTOS LIMITES

Como definido no item 13.3 da ABNT NBR 6118:2014, "Deslocamentos limites são valores práticos utilizados para verificação em serviço do estado limite de deformações excessivas da estrutura". Os deslocamentos excessivos e a tendência à vibração dos elementos estruturais podem ser indesejáveis por diversos motivos, que podem ser classificados em quatro grupos básicos:

- a) **Aceitabilidade sensorial:** o limite é caracterizado por vibrações indesejáveis ou efeito visual desagradável. A limitação da flecha para prevenir essas vibrações, em situações especiais de utilização, deve ser realizada como estabelecido na seção 23 da norma; limites para esses casos são apresentados no Quadro 4.7 (Tabela 13.3 da ABNT NBR 6118:2014).

- b) **Efeitos específicos:** os deslocamentos podem impedir a utilização adequada da construção; limites para esses casos são apresentados no Quadro 4.8 (Tabela 13.3 da ABNT NBR 6118:2014).
- c) **Efeitos em elementos não estruturais:** deslocamentos estruturais podem ocasionar o mau funcionamento de elementos que, apesar de não fazerem parte da estrutura, estão ligados a ela; os limites para esses casos são apresentados no Quadro 4.9 (Tabela 13.3 da ABNT NBR 6118:2014).
- d) **Efeitos em elementos estruturais:** os deslocamentos podem afetar o comportamento do elemento estrutural, provocando afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas. Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados, incorporando-os ao modelo estrutural adotado.

Para os quadros 4.7 a 4.9, são necessárias as seguintes observações gerais:

- Todos os valores limites de deslocamentos supõem elementos de vão  $l$  suportados em ambas as extremidades por apoios que não se movem; quando se tratar de balanços, o vão equivalente a ser considerado deve ser o dobro do comprimento do balanço;
- Para o caso de elementos de superfície, os limites prescritos consideram que  $l$  é o menor vão, exceto em casos de verificação de paredes e divisórias, em que interessa a direção na qual a parede ou divisória se desenvolve, limitando-se este valor a duas vezes o vão menor;
- Será obtido deslocamento total a partir da combinação das ações características ponderadas pelos coeficientes definidos na seção 11 da norma (dados aqui no capítulo 1);
- Deslocamentos excessivos podem ser parcialmente compensados por contraflechas.

**Quadro 4.7** Limites para deslocamentos – aceitabilidade sensorial.

Razão da limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento limite
Visual	Deslocamentos visíveis em elementos estruturais	Total (combinação quase permanente)	$l/250$
Outros	Vibrações sentidas no piso	Devidos a cargas acidentais	$l/350$

Quadro 4.8 Limites para deslocamentos – efeitos estruturais em serviço.

Razão da limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento limite
Superfícies que devem drenar água	Coberturas e varandas	Total (combinação quase permanente)	$l/250^{(a)}$
Pavimentos que devem permanecer planos	Ginásios e pistas de boliche	Total	$l/350 +$ contraflecha <sup>(b)</sup>
		Ocorrido após a construção do piso	$l/600$
Elementos que suportam equipamentos sensíveis	Laboratórios	Ocorrido após nivelamento do equipamento	Conforme definido pelo fabricante do equipamento

(a) As superfícies devem ser suficientemente inclinadas ou o deslocamento previsto compensado por contraflechas para não acumular água.

(b) Os deslocamentos podem ser parcialmente compensados pela especificação de contraflechas; entretanto, a atuação isolada da contraflecha não pode ocasionar um desvio do plano maior que  $l/350$ .

Quadro 4.9 Limites para deslocamentos – efeitos em elementos não estruturais.

Razão da limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento limite
Paredes	Alvenaria, caixilhos e revestimentos	Ocorrido após a construção da parede	$l/500^{(a)}$ ou 10 mm ou $\theta = 0,0017 \text{ rad}^{(b)}$
	Divisórias leves e caixilhos telescópicos	Ocorrido após a instalação da divisória	$l/250^{(a)}$ ou 25 mm
	Movimento lateral de edifícios	Provocado pela ação do vento para combinação frequente ( $\psi_1 = 0,30$ )	$H/1700$ ou $H/850^{(c)}$ entre pavimentos <sup>(d)</sup>
	Movimentos térmicos verticais	Provocado por diferença de temperatura	$l/400^{(a)}$ ou 15 mm
Forros	Movimentos térmicos horizontais	Provocado por diferença de temperatura	$H/500$
	Revestimentos colados	Ocorrido após construção do forro	$l/350$
	Revestimentos pendurados ou com juntas	Ocorrido após construção do forro	$l/175$

Quadro 4.9 Continuação...

Razão da limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento limite
Pontes rolantes	Desalinhamento de trilhos	Provocado pelas ações decorrentes da frenagem	H/400

- (a) O vão  $l$  deve ser tomado na direção na qual a parede ou a divisória se desenvolve.
- (b) Rotação nos elementos que suportam paredes.
- (c) H é a altura total do edifício e  $H_1$  é o desnível entre dois pavimentos vizinhos.
- (d) Este limite se aplica ao deslocamento lateral entre dois pavimentos consecutivos devido à atuação de ações horizontais; não se devem incluir os deslocamentos devidos a deformações axiais nos pilares; o limite também se aplica ao deslocamento vertical relativo das extremidades de lintéis conectados a duas paredes de contraventamento, quando  $H_1$  representa o comprimento do lintel.
- (e) O valor  $l$  refere-se à distância entre o pilar externo e o primeiro pilar interno

#### 4.8.2 CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM VIGAS

Para vigas executadas com materiais que seguem as leis da resistência dos materiais (aqueles que têm comportamento elástico e linear), o cálculo do deslocamento  $a$ , em um ponto K (Figura 4.5), é feito pelo princípio dos trabalhos virtuais. Para isso, consideram-se as funções  $M_0(x)$  do momento fletor devido ao carregamento atuante (no caso, carga uniformemente distribuída  $p$ ),  $M_1(x)$  do momento devido a uma carga concentrada (virtual) unitária, também aplicada em K, e os valores do módulo de elasticidade do material e da inércia  $I$  da seção transversal (equação 4.7), sendo  $x$  a cota de uma seção genérica da viga, medida, no caso da Figura 4.5, a partir do apoio esquerdo.

$$a = \int_{x=0}^{x=l} \frac{M_0 \cdot M_1}{E \cdot I} dx \quad (4.7)$$

Viga simplesmente apoiada

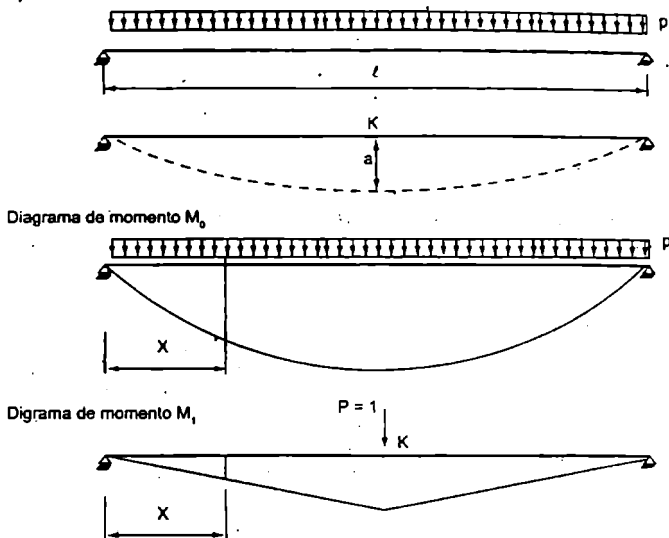


Figura 4.5 Esquema para o cálculo do deslocamento  $a$  em um ponto  $K$  de uma viga simplesmente apoiada sob carregamento uniforme.

Se o ponto  $K$  escolhido corresponder à seção em que ocorre o maior deslocamento, o deslocamento  $a$  é chamado de flecha (nomenclatura da ABNT NBR 6118:2014). Para vigas de seção constante, o produto  $EI$ , chamado de rigidez, pode ser colocado em

evidência, e a flecha passa a ser função da integral  $\int_{x=0}^{x=l} M_n \cdot M_1 dx$ .

Na estruturas de concreto armado, o cálculo da flecha é mais complexo, pois além da existência da armadura, que acentua as características de não homogeneidade do material, há a possibilidade, mesmo sob ações de serviço, de que regiões da viga tenham parte do concreto (abaixo da linha neutra) fissurado, diminuindo a rigidez das seções nessas regiões. Na viga da Figura 4.6 há dois trechos com comportamento típico do estágio I e um trecho (central) típico do estágio II.

Os estádios, já mencionados no capítulo 3, são situações em que a seção transversal tem comportamentos distintos, dependendo da intensidade das solicitações. No estágio I, o concreto resiste às tensões de tração juntamente com a armadura, e o diagrama de tensões no concreto é linear. Para momentos maiores que  $M_f$  (momento de fissuração a partir do qual podem surgir fissuras de flexão na seção), o concreto tracionado não tem capacidade de resistir às tensões, admitindo-se assim que toda tração seja resistida pela armadura, situação esta chamada de estágio II puro. A inércia das seções

nesta situação é menor que as no estágio I, e o cálculo das inércias nos estádios I e II e do momento de fissuração serão vistos adiante.

Se a viga da Figura 4.6, considerada de inércia constante, estivesse solicitada apenas por momentos inferiores ao de fissuração, à expressão 4.8 poderia ser usada para cálculo da flecha, empregando-se para a inércia o valor correspondente ao da seção geométrica (com ou sem a presença da armadura), como será visto posteriormente. Porém, como o diagrama de momentos fletores apresenta trechos em que o momento atuante ora é inferior ao momento de fissuração, ora tem valores superiores, o cálculo da flecha requereria, em princípio, o uso de uma integração que levasse esse-fato em conta.

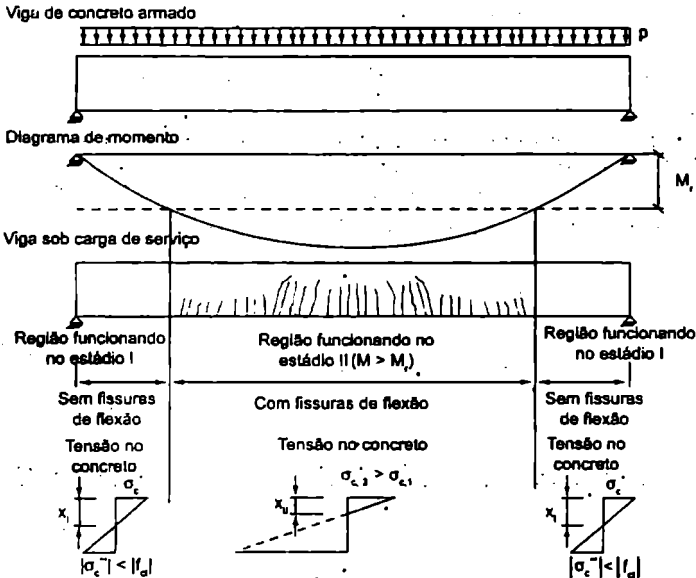


Figura 4.6 Viga de concreto armado simplesmente apoiada sob ações de serviço.

O concreto armado sob flexão, ao fissurar, apresenta um comportamento em que não há linearidade entre ações e deslocamentos, como foi visto na seção 2.7.2, Figura 2.17, em que a curva A representa a peça funcionando no estágio I, sendo possível considerar que exista linearidade entre ação e deslocamento, e as curvas B representam comportamento típico do estágio II, com apenas um pequeno trecho tendo comportamento linear.

Além da não linearidade devida à fissuração, há também a não linearidade provocada pela fluência do concreto. Fluência é a deformação que o concreto apresenta, ao longo do tempo, quando submetido a ações de longa duração. Portanto, carregando-se uma viga de concreto armado, esta sofre uma deformação imediata, e, mantendo-

do-se este carregamento, com o passar do tempo há um aumento desta deformação, causado pela fluência.

Na Figura 4.7 apresenta-se a variação da flecha ao longo do tempo de um trecho de laje pré-moldada (comportamento de viga) ensaiada por Rogge;<sup>17</sup> uma das curvas foi obtida unindo-se cada ponto obtido, e a outra representa a tendência de comportamento da viga; o carregamento foi aplicado aos 7 e aos 30 dias de idade da viga. A consideração do efeito da fluência será apresentada em itens posteriores.

Percebe-se, pelo fato de não haver linearidade entre esforços e deslocamentos, que é preciso considerar, para as verificações dos estados limites de serviço, diversas combinações de ações (ou seus efeitos, ou seja, as solicitações), que foram apresentadas no capítulo 1, e serão definidas conforme a verificação a ser empregada, de acordo com os limites dados nos quadros 4.7 a 4.9 da seção 4.8.1. De qualquer maneira, é necessário inicialmente determinar as inércias de seções de concreto nos estádios I e II.

A abordagem que aqui será feita, fruto de diversos estudos realizados, é um pequeno roteiro para o cálculo de deslocamentos em vigas de concreto armado, dentro dos princípios e dos conceitos estabelecidos na ABNT NBR 6118:2014.

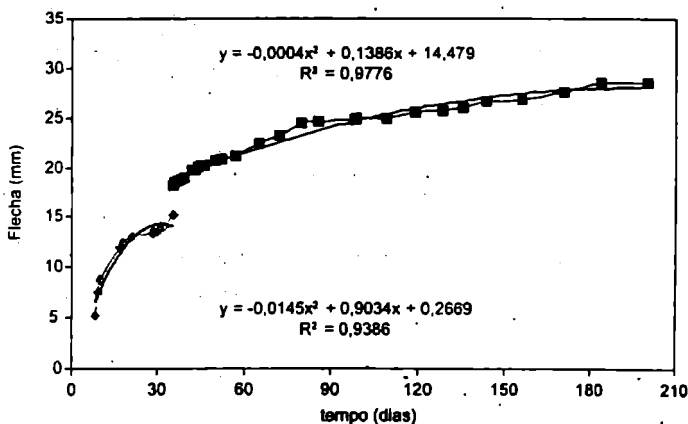


Figura 4.7 Variação da flecha no tempo de uma nervura de laje pré-moldada.<sup>18</sup>

Pode-se dizer, finalmente, que as seções trabalham nos estádios I ou II quando são solicitadas pelas ações de serviço, e como em uma viga existem seções trabalhando nas duas situações, sua rigidez é substancialmente afetada pelo momento e pelo grau de fissuração do concreto, e, portanto, para a determinação da flecha é necessário obter uma inércia (média) que reflita essa condição e possibilite a integração da expressão 4.7.

17 Rogge et al. (2002).

18 Id. ibid.

#### 4.8.2.1 Características geométricas de seções no estádio I

Nas peças de concreto armado, todo o detalhamento da armadura é feito com o objetivo de garantir a aderência das barras de aço ao concreto, de modo que os dois materiais trabalhem solidariamente. Assim, o centro de rotação da seção e a rigidez da mesma são afetados pelo posicionamento da armadura, e, neste caso, deve ser feita a homogeneização da seção, que consiste em considerar no lugar da área de aço existente  $A_s$  uma área de concreto equivalente. Nesta situação, supõe-se que há linearidade entre tensão e deformação (vale a Lei de Hooke, pois as deformações são pequenas), e como as deformações específicas do aço e do concreto são iguais ( $\epsilon_s = \epsilon_c$ ), devido à aderência, tem-se:

$$R_s = A_s \cdot \sigma_s = A_s \cdot \epsilon_s \cdot E_s = A_s \cdot \epsilon_c \cdot E_s$$

sendo  $R_s$ ,  $A_s$  e  $E_s$  a força, a área da armadura e o módulo de deformação longitudinal do aço, respectivamente.

Para homogeneizar a seção, é preciso encontrar uma área de concreto (área equivalente) que suporte uma força igual à da armadura, ou seja:

$$R_s = A_{c,eq} \cdot \epsilon_c \cdot E_c$$

em que  $E_c$  é o módulo de elasticidade do concreto; igualando as duas expressões de  $R_s$ , é possível encontrar a relação entre a área de concreto e a de armadura:

$$A_s \cdot \epsilon_c \cdot E_s = A_{c,eq} \cdot \epsilon_c \cdot E_c \rightarrow A_{c,eq} = \frac{A_s \cdot E_s}{E_c} = A_s \cdot \frac{E_s}{E_c}$$

e chamando de  $\alpha_c$  a relação entre os módulos de deformação longitudinal do aço e do concreto ( $\alpha_c = E_s/E_c$ ), a área equivalente de concreto é dada por:

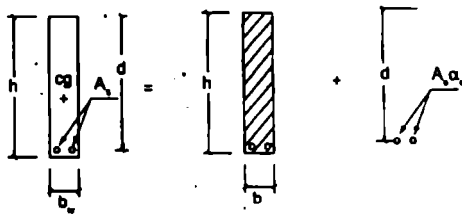
$$A_{c,eq} = A_s \cdot \alpha_c \quad (4.8)$$

Uma seção transversal retangular de concreto armado, como a indicada na Figura 4.8, é então composta de uma área de concreto igual a  $b \cdot h$  e uma seção de concreto equivalente à do aço igual a  $A_s \cdot (\alpha_c - 1)$ . Diminui-se 1 de  $\alpha_c$  para considerar que na posição da armadura a área de concreto já foi computada uma vez no produto  $b \cdot h$ .

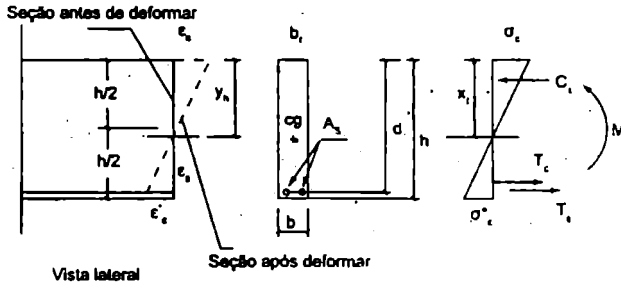
Na Figura 4.8b estão indicadas as resultantes  $C_c$ ,  $T_c$  e  $T_s$  das tensões que ocorrem no concreto comprimido ( $\sigma_c$ ) e tracionado ( $\sigma_c'$ ) e na armadura tracionada ( $\sigma_s$ ), respectivamente, e que são iguais a:

$$C_c = \frac{\sigma_c \cdot b \cdot x_1}{2}; T_c = \frac{\sigma_c' \cdot b \cdot (h - x_1)}{2}; T_s = A_s \cdot \sigma_s = A_s \cdot (\alpha_c - 1) \cdot \sigma_c$$

sendo  $\sigma_c$  a tensão de tração no concreto no nível da armadura.



a) Seção transversal composta de seção de concreto e de aço transformada em área equivalente de concreto



b) Seção transversal no estágio I com reações

Figura 4.8 Seção retangular homogeneizada trabalhando no estágio I.

Colocando todas as forças em função da tensão de compressão no concreto ( $\sigma_c$ ), resulta:

$$C_c = \frac{\sigma_c \cdot h \cdot x_1}{2}; T_c = \frac{\sigma_c \cdot b \cdot (h - x_1)^2}{2 \cdot x_1}; T_s = A_s \cdot (\alpha_s - 1) \cdot \frac{\sigma_c \cdot (d - x_1)}{x_1}$$

Como se trata de flexão simples, há o equilíbrio entre as três forças, e eliminando  $\sigma_c$ :

$$C_c = T_c + T_s \Rightarrow \frac{b \cdot x_1}{2} = \frac{b \cdot (h - x_1)^2}{2 \cdot x_1} + A_s \cdot (\alpha_s - 1) \cdot \frac{(d - x_1)}{x_1}$$

e finalmente:

$$\frac{b \cdot x_1^3}{2} = \frac{b \cdot (h - x_1)^2}{2} + A_s \cdot (\alpha_s - 1) \cdot (d - x_1) \quad (4.9)$$

A expressão 4.9 corresponde ao momento estático de cada área (a de concreto comprimido, a de concreto tracionado e a de aço tracionado) em relação ao eixo de giro da seção, indicando que se trata, portanto, do centro de gravidade da seção homogeneizada. Desta forma, conclui-se que após a homogeneização da seção (transformação do

aço em concreto equivalente), podem-se calcular de maneira usual todas as características geométricas da seção.

Quando se efetua o detalhamento de uma estrutura de concreto armado, em princípio não se conhecem as dimensões e muito menos as armaduras. Dessa forma, arbitram-se, inicialmente, dimensões para os diversos elementos a fim de determinar as ações e, em seguida, proceder ao cálculo dos esforços solicitantes. Nas estruturas hiperestáticas, como vigas contínuas, grelhas e pórticos, é necessário definir as características geométricas dos diversos elementos para a determinação dos esforços solicitantes, mesmo que se esteja empregando programa de computador. É usual escolher inicialmente as características das seções considerando-as formadas somente por concreto, ou seja, desconsiderando a presença da armadura. Para este caso, as expressões para uma seção em forma de "T" (Figura 4.9) estão no Quadro 4.10.

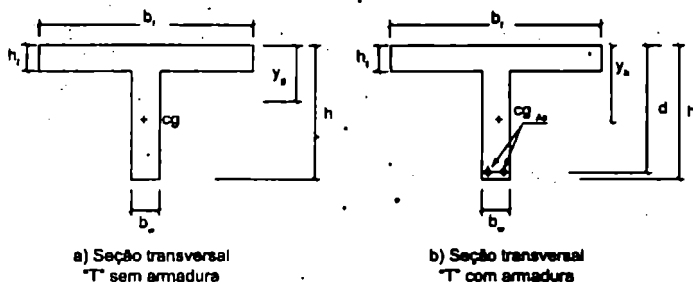


Figura 4.9 Elementos de seção transversal em forma de "T".

**Quadro 4.10** Características geométricas de seções transversais em "T" no estágio I, sem considerar a presença da armadura.

	Expressão	
Área (seção geométrica)	$A_g = (b_f - b_w) \cdot h_f + b_w \cdot h$	(4.10)
Centro de gravidade	$y_{cg} = \frac{(b_f - b_w) \cdot \left(\frac{h_f^2}{2}\right) + b_w \cdot \frac{h^2}{2}}{A_g}$	(4.11)
Momento de inércia à flexão	$I_g = \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_w \cdot h^3}{12} + (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot \left(y_{cg} - \frac{h_f}{2}\right)^2 + b_w \cdot h \cdot \left(y_{cg} - \frac{h}{2}\right)^2$	(4.12)

Uma vez determinada a quantidade de armadura necessária, pode-se agora trabalhar com a seção composta de aço e concreto usando o procedimento de homogeneização. Para uma seção "T", as expressões são as do Quadro 4.11. As fórmulas relacionadas nos quadros 4.10 e 4.11 aplicam-se também às seções retangulares, bastando fazer  $b_f = b_w$  ou  $h_f = 0$ .

É interessante destacar que as características geométricas da seção de concreto sem armadura, chamada de bruta pela norma de concreto, em diversas situações pouco diferem daquelas em que se considera a armadura (seções homogeneizadas), podendo-se em alguns casos calcular apenas as referentes à seção bruta, ao invés da homogeneizada.

Quadro 4.11 Características geométricas de seções transversais em "T" no estágio I, com armadura longitudinal  $A_s$ .

	Expressão	
Área (seção homogeneizada)	$A_h = (b_f - b_w) \cdot h_f + b_w \cdot h + A_s \cdot (\alpha - 1)$	(4.13)
Centro de gravidade	$y_h = \frac{(b_f - b_w) \cdot \left(\frac{h_f^2}{2}\right) + b_w \cdot \frac{h^2}{2} + A_s (\alpha - 1) \cdot d}{A_h}$	(4.14)
Momento de inércia à flexão	$I_h = \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_w \cdot h^3}{12} + (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot \left(y_h - \frac{h_f}{2}\right)^2 + b_w \cdot h \cdot \left(y_h - \frac{h}{2}\right)^2 + A_s \cdot (\alpha - 1) \cdot (y_h - d)^2$	(4.15)

#### 4.8.2.2 Características geométricas de seções no estágio II

Aumentado-se o valor do momento fletor atuante na seção, as tensões de tração na maioria dos pontos abaixo da linha neutra (LN) terão valores superiores ao da resistência característica do concreto à tração ( $f_{tk}$ ), conduzindo ao estágio II (estado de fissuração), em que se admite ainda que:

- os esforços de tração são resistidos apenas pela armadura localizada abaixo da linha neutra;
- há uma relação linear entre tensão e deformação específica no concreto para todos os pontos da seção transversal.

Cabe destacar que essa é uma situação limite do estágio II, pois todo o concreto da região fissurada está sendo desprezado, e, portanto, é usual, nesse caso, para diferenciar, nomeá-la como estágio II puro.

O estágio II puro compreende a situação em que atua na seção um momento maior que o momento de fissuração, até à situação em que começa a ocorrer o escoamento da armadura e/ou a plastificação do concreto comprimido, apresentando as seguintes características:

- A distribuição das tensões de compressão no concreto é triangular;
- O concreto não trabalha à tração, sendo este esforço resistido apenas pela armadura abaixo da linha neutra;
- Não ocorre escoamento do aço nem plastificação do concreto.

Na Figura 4.10 indica-se o que ocorre em uma seção do tipo "T" quando atua um momento maior que o de fissuração.

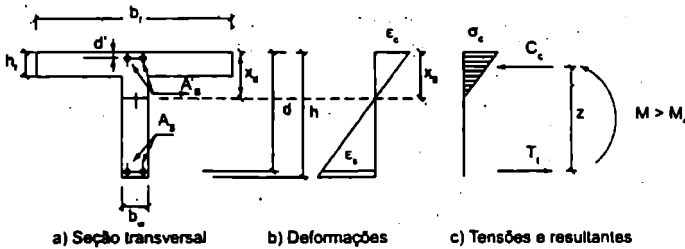


Figura 4.10 Seção transversal em forma de "T" no estágio II puro.

Para o cálculo do momento de inércia no estágio II puro, é necessário conhecer a posição  $x_{II}$  da linha neutra, obtida igualando-se o momento estático da seção homogeneizada a zero. O cálculo de  $x_{II}$  pôde ser encontrado em Ghali & Favre,<sup>19</sup> que em casos de vigas com seção em forma de "T" são obtidos da equação do segundo grau:

$$a_1 \cdot x_{II}^2 + a_2 \cdot x_{II} + a_3 = 0 \quad (4.16)$$

cuja solução é

$$x_{II} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4 \cdot a_1 \cdot a_3}}{2 \cdot a_1} \quad (4.17)$$

com os coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  iguais a:

$$a_1 = b_w/2 \quad (4.18)$$

$$a_2 = h_f \cdot (b_f - b_w) + (\alpha_c - 1) \cdot A_c' + \alpha_s \cdot A_s \quad (4.19)$$

$$a_s = -d' \cdot (\alpha_c - 1) \cdot A_s' - d \cdot \alpha_c \cdot A_s - \frac{h_f^2}{2} \cdot (b_f - b_w) \quad (4.20)$$

e  $d'$  sendo a distância do centro de gravidade da armadura comprimida  $A_s'$  até à borda comprimida de concreto.

Para situações em que a viga tem seção transversal retangular e não há armadura negativa, as equações também são válidas, bastando fazer  $b_w = b_f$ ,  $h_f = 0$  e  $A_s' = 0$ .

É possível, agora, calcular o momento de inércia da seção no estágio II puro ( $I_{x,II_0}$ ) em relação à linha neutra, cuja posição  $x_{II}$  foi determinada, lembrando que há duas possibilidades: a primeira, quando a profundidade da linha neutra é inferior à espessura da mesa  $x_{II} \leq h_f$ ; a segunda, quando  $x_{II} > h_f$ , resultando nas expressões 4.21 e 4.22, respectivamente:

$$I_{x,II_0} = \frac{b_f \cdot x_{II}^3}{3} + \alpha_c \cdot A_s \cdot (x_{II} - d)^2 + (\alpha_c - 1) \cdot A_s' \cdot (x_{II} - d')^2 \quad (4.21)$$

$$I_{x,II_0} = \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_w \cdot x_{II}^3}{3} + (b_f - b_w) \cdot \left(x_{II} - \frac{h_f}{2}\right)^2 + \alpha_c \cdot A_s \cdot (x_{II} - d)^2 + (\alpha_c - 1) \cdot A_s' \cdot (x_{II} - d')^2 \quad (4.22)$$

As características das seções, tanto no estágio I como no estágio II puro, podem ser obtidas por um programa desenvolvido por Molina<sup>20</sup> e mais recentemente por Marquesi.<sup>21</sup>

#### 4.8.2.3 Efeito da fissuração – modelo simplificado de Branson para flecha imediata

As expressões obtidas na seção anterior são relativas aos limites dos estádios I e II. Porém, na realidade, um elemento de concreto, por exemplo, a viga da Figura 4.6, tem seções trabalhando entre esses dois estádios, sendo então necessário, para calcular sua flecha contemplando essa situação, utilizar uma inércia média, para que não seja necessário introduzir a variação de inércia na expressão 4.7.

O modelo proposto por Branson<sup>22</sup> admite para todo o elemento de concreto uma única inércia, que representa os trechos fissurados e não fissurados. Baseia-se em um método semiprobabilístico, no qual se toma a variação da tensão ao longo da seção transversal e ao longo do comprimento de uma maneira simplificada, utilizando expressões empíricas que fornecem valores médios da inércia. Dessa forma, Branson procura traduzir, aproximadamente, o efeito da fissuração do concreto, quando submetido à flexão, no cálculo das deformações imediatas.

20 Molina & Carvalho (1999).

21 Marquesi (2010).

22 Branson (1968).

Esse procedimento pode ser utilizado para se obter o valor da inércia, intermediário ao valor no estágio I e no final do estágio II (estádio II puro). De forma geral, a expressão obtida por Branson é dada por:

$$I_m = \left( \frac{M_f}{M_u} \right)^n \cdot I_I + \left[ 1 - \left( \frac{M_f}{M_u} \right)^n \right] \cdot I_{II} \quad (4.23)$$

em que:

$I_m$  - momento de inércia efetivo para uma seção ou para toda a peça, no caso de vigas simplesmente apoiadas; momento de inércia médio entre a seção do apoio e a seção do meio do vão, para o caso de vigas contínuas;

$I_I$  - momento de inércia da peça no estágio I (da seção bruta ou homogeneizada);

$I_{II}$  - momento de inércia da peça no estágio II puro;

$M_f$  - momento de fissuração do concreto;

$M_u$  - momento atuante, de serviço, na seção mais solicitada;

$n$  - índice de valor igual a 4, para situações em que a análise é feita em apenas uma seção da peça, ou igual a 3, quando se faz a análise da peça ao longo de todo o seu comprimento, que é a situação em questão.

Na ABNT NBR 6118:2014, item 17.3.2.1, na avaliação aproximada da flecha imediata (tempo zero) em vigas foi feita uma adaptação na expressão 4.23 para o cálculo da rigidez equivalente de uma viga de concreto, dada pela equação:

$$(E \cdot I)_{eq, t=0} = E_\alpha \cdot \left\{ \left( \frac{M_f}{M_u} \right)^3 \cdot I_c + \left[ 1 - \left( \frac{M_f}{M_u} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_\alpha \cdot I_c \quad (4.24)$$

em que:

$I_c$  - momento de inércia da seção bruta de concreto;

$I_{II}$  - momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II, calculado

com o coeficiente  $\alpha_c = \frac{E_t}{E_\alpha}$ ;

$M_u$  - momento fletor na seção crítica do vão considerado; momento máximo no vão para vigas biapoiadas ou contínuas e momento no apoio para balanços, para a combinação de ações considerada nessa avaliação;

$M_f$  - momento de fissuração do elemento estrutural, dado pela expressão 4.25, e que deve ser reduzido à metade para barras lisas;

$E_\alpha$  - módulo de elasticidade secante do concreto.

O momento de fissuração  $M_f$ , para verificação do estado limite de deformação excessiva, de acordo com o item 17.3.1 da ABNT NBR 6118:2014, pode ser calculado por:

$$M_f = \frac{\alpha \cdot f_{\alpha,m} \cdot I_c}{y_t} \quad (4.25)$$

sendo:

$\alpha = 1,2$  para seções em forma de "T" ou duplo "T";

$\alpha = 1,3$  para seções I ou T invertido

$\alpha = 1,5$  para seções retangulares;

$I_c$  - momento de inércia da seção bruta de concreto;

$f_{\alpha,m}$  - resistência média à tração do concreto, conforme item 8.2.5 da norma (seção 1.6.2.3, capítulo 1), dada por:  $f_{\alpha,m} = 0,3 \cdot f_{ct}^{2/3}$  (para o caso de estado de deformação excessiva) e resistência à tração inferior do concreto dado por  $f_{ctk,inf} = 0,21 \cdot f_{ct}^{2/3}$  (para verificação do estado de formação de fissura); expressões válidas até C50;

$y_t$  - distância do centro de gravidade à fibra mais tracionada.

Note-se que embora a norma (item 17.3.2.1.1) considere a rigidez da seção bruta como a representativa do estágio I, é possível, e inclusive recomendado, usar a rigidez da seção homogeneizada. Assim, a previsão da flecha imediata ou instantânea (sem o efeito da fluência), para vigas, pode ser feita a partir da equação da resistência dos materiais, válida para seções constantes ao longo da peça, considerando a inércia média:

$$a = \frac{\alpha_c \cdot p \cdot \ell^4}{(E \cdot I)_{eq}} \quad (4.26)$$

em que:

$p$  - carga definida por certa combinação (por exemplo, quase permanente);

$\ell$  - vão da viga;

$(E \cdot I)_{eq}$  - rigidez equivalente dada pela expressão 4.24;

$\alpha_c$  - coeficiente que depende da condição estática do sistema considerado (simplesmente apoiado, contínuo) e do tipo de ações atuantes; é encontrado em livros de resistência dos materiais e de teoria das estruturas; no caso de vigas simplesmente apoiadas e carga uniformemente distribuída,  $\alpha_c = (5/384)$ .

Os resultados obtidos pela expressão de Branson conduzem a resultados muito bons para vigas simplesmente apoiadas e para vigas contínuas; para elementos mais

complexos como lajes, a expressão pode ser usada junto com a técnica de dividir o elemento em trechos e fazer o carregamento da estrutura por etapas, avaliando em cada etapa qual o nível de fissuração de cada trecho. Mais detalhes podem ser encontrados em Carvalho.<sup>23</sup>

#### 4.8.2.4 Efeito da fluência do concreto – avaliação da flecha diferida no tempo

Fluência é o fenômeno em que surgem deformações ao longo do tempo em um corpo solicitado por tensão constante. Esse fenômeno é parcialmente reversível, ou seja, ao retirar o carregamento que originou a deformação, uma parcela desta deformação total é restituída imediatamente, outra parte é restituída com o tempo e o restante se torna permanente.

Além da fluência, pode contribuir para o aumento das deformações em estruturas de concreto a ocorrência do fenômeno da retração. Retração é a variação volumétrica que uma peça de concreto sofre ao longo do tempo, principalmente pela saída de água existente nos poros do mesmo. Geralmente a parcela de deformação devida à retração é pequena, sendo, portanto, desprezada na maioria dos cálculos.

As parcelas das deformações devidas à fluência podem ser caracterizadas por: deformação rápida, que ocorre nas primeiras 24 horas após a aplicação do carregamento e é irreversível, e deformação lenta, composta de uma parte reversível e outra irreversível.

Considera-se que as deformações de fluência sejam oriundas das ações permanentes. Porém, para calculá-las é utilizada a combinação quase permanente, pois, em edificações, parte da carga acidental atua em um longo período da vida da mesma.

Nas peças de concreto, a armadura inibe a deformação do concreto ao longo do tempo, tanto na retração como na fluência. Em peças fletidas, a armadura é normalmente posicionada na região tracionada, onde a contribuição do concreto na resistência é pequena, sendo desprezada para efeito de cálculo; admite-se, assim, que não ocorre a fluência nessa região.

Há uma série de processos para se calcular deslocamentos ao longo do tempo, considerando o efeito da fluência e de retração do concreto, que podem ser encontrados, por exemplo, em Tirintan,<sup>24</sup> mas que não cabem ser aqui apresentados. Prefere-se considerar o prescrito no item 17.3.2.1.2 da ABNT NBR 6118:2014, em que a flecha adicional diferida de vigas, decorrente das cargas de longa duração em função da fluência, pode ser calculada, de maneira aproximada, pela multiplicação da flecha imediata por um fator  $\alpha_f$ , dado por:

$$\alpha_f = \frac{\Delta \xi}{1 + 50 \cdot \rho'} \quad (4.27)$$

23 Carvalho (1994).

24 Tirintan et al. (2002).

em que:

$$\rho' = \frac{A_s}{b \cdot d} \quad (\text{o valor de } \rho' \text{ será ponderado no vão de maneira análoga ao cálculo de}$$

$I_{eq}$ );

$A_s$  - área da armadura de compressão no trecho considerado;

$\xi$  - coeficiente função do tempo, sendo  $\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0)$ ;

$$\xi(t) = \begin{cases} 0,68 \cdot 0,996^t \cdot t^{0,32} & \text{para } t \leq 70 \text{ meses} \\ 2 & \text{para } t \geq 70 \text{ meses} \end{cases}$$

$t$  - tempo, em meses, quando se deseja o valor da flecha diferida;

$t_0$  - idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração; se as parcelas de cargas de longa duração forem adotadas em idades variadas,

$$\text{então } t_0 = \frac{\sum P_i \cdot t_{0i}}{\sum P_i}$$

$P_i$  - parcelas de carga;

$t_{0i}$  - idade, em meses, em que se aplicou cada parcela  $P_i$ .

O valor da flecha total no tempo infinito ( $a_{t,\infty}$ ) será  $(1 + \alpha_r)$  vezes a flecha imediata:

$$a_{t,\infty} = a_{t,0} \cdot (1 + \alpha_r) \quad (4.28)$$

em que  $a_{t,0}$  é a flecha imediata para a combinação de ações considerada e de caráter permanente.

Finalmente, pode-se afirmar que a deformação em peças fletidas devida ao efeito da fluência não deve ser desprezada, pois pode atingir valores até o triplo do valor da deformação imediata, embora pela expressão 4.27 se consiga obter, no máximo, o dobro. Ensaios realizados por Rogge<sup>25</sup> mostram que os resultados da expressão da norma brasileira subestimam as flechas diferidas de lajes pré-moldadas unidirecionais de pequena altura (11 cm de altura), que na verdade se comportam como uma série de vigas justapostas, como visto no capítulo 2. Dessa maneira, deve-se ter bastante cuidado ao se empregar a expressão 4.27 para a avaliação da parcela da flecha devida à fluência.

### Exemplo 1

Calcular e detalhar as seções transversais mais solicitadas da viga central (V101), da estrutura da Figura 4.11, que tem largura de 25 cm. Considerar sobre a viga uma parede de tijolo com espessura de 25 cm (tijolo maciço). Empregar como sobrecarga permanente 1,5 kN/m<sup>2</sup> (já incluindo o revestimento de piso e argamassa inferior à laje)

25 Rogge et al. (2002).

e como carga accidental  $4 \text{ kN/m}^2$ . Utilizar laje pré-moldada  $\beta 16$  ( $h = 16 \text{ cm}$ ), simplesmente apoiada e de classe 27, com armadura longitudinal  $A_s = 3,615 \text{ cm}^2$  (CA60).

Dados:  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$  ( $20.000 \text{ kN/m}^2$ ); aço CA50; cobrimento da viga ( $c$ ) igual a  $3 \text{ cm}$  (classe de agressividade ambiental II); altura da parede igual a  $3 \text{ m}$ ; pilares de  $40 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ ;  $\gamma_{conc} = 25 \text{ kN/m}^3$ ;  $\gamma_{sv} = 18 \text{ kN/m}^3$ ; brita 2 ( $d_{max} = 2,5 \text{ cm}$ ).

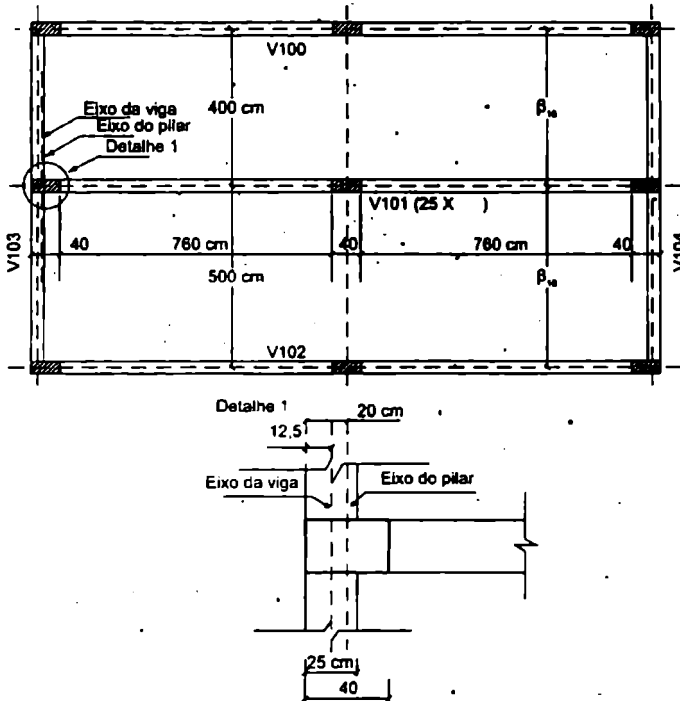


Figura 4.11 Planta da fôrma da estrutura cuja viga V101 será calculada.

#### a) Determinação do esquema estrutural da viga

Inicialmente é preciso definir o esquema estrutural da viga V101. O item 14.6.6.1 da ABNT NBR 6118:2014 permite que as vigas sejam calculadas com o modelo clássico de viga contínua, simplesmente apoiada nos pilares, desde que observadas as seguintes condições:

1. Não devem ser considerados momentos positivos menores que os que se obteriam se houvesse engastamento perfeito da viga nos apoios internos;
2. Quando a viga for solidária com o pilar intermediário e a largura do apoio, medida na direção do eixo da viga, for maior que a quarta parte da altura do pilar, não pode ser considerado momento negativo de valor absoluto menor do que o de engastamento perfeito nesse apoio;

3. Quando não for realizado o cálculo exato da influência da solidariedade do pilar com a viga, deve ser considerado, nos apoios externos, um momento advindo de cálculo simplificado, como se verá no capítulo 5.

**Vão efetivo:** o vão efetivo de uma viga, de acordo com o item 14.6.2.4 da norma, pode ser determinado por:

$$\ell_{ef} = \ell_0 + a_1 + a_2$$

sendo  $\ell_0$  a distância livre entre as faces dos apoios internos, e devendo  $a_1$  e  $a_2$  serem inferiores a  $0,3 \cdot h$  (altura da viga) ou  $0,5$  do valor de  $t_1$  ou  $t_2$ , respectivamente ( $t_1$  é a dimensão do apoio externo e  $t_2$  a do interno, medidos na direção do eixo da viga, conforme a Figura 4.12).

Para a viga V101, com  $h = 90$  cm (altura adotada para a viga) e  $t_1 = t_2 = 40$  cm, deve-se tomar para  $a_1$  e  $a_2$  o menor entre os valores  $a_1 = a_2 = 0,3 \cdot 90 = 27$  cm ou  $a_1 = a_2 = 0,5 \cdot 40 = 20$  cm, e, portanto,  $a_1 = a_2 = 20$  cm, resultando:

$$\ell_{ef} = 760 + 20 + 20 = 800 \text{ cm}$$

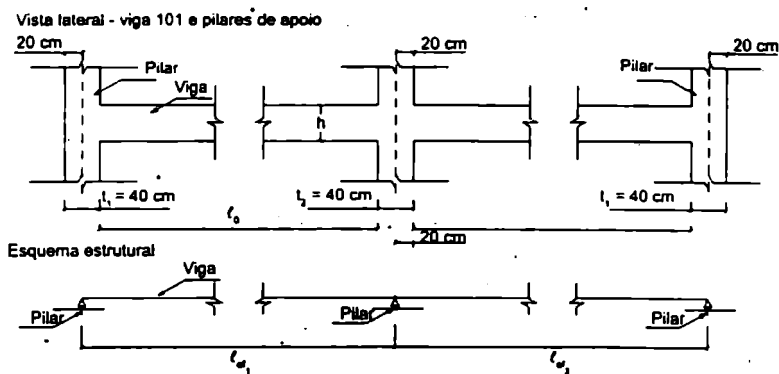


Figura 4.12 Esquema estrutural da viga V101.

#### b) Escolha da altura inicial da viga

Para determinar a altura da viga é preciso conhecer as bitolas das armaduras empregadas. Adota-se, inicialmente, para os estribos (armadura transversal) barras de diâmetro  $\phi_{est} = 6,3$  mm e, para a armadura longitudinal, barras com diâmetro  $\phi_{long} = 12,5$  mm (com mossas iguais a  $0,04 \cdot 1,25 = 0,05$  cm, valor que será somado ao diâmetro das barras). Assim, para encontrar a altura total da viga parte-se de uma altura útil mínima (seção 2.8, capítulo 2), à qual deve ser somado o cobrimento, o diâmetro do estribo e metade do diâmetro da armadura longitudinal da primeira camada:

$$d_{\min} \geq \frac{\ell}{\psi_2 \cdot \psi_3} = \frac{8,0}{1,2 \cdot 1,7} = 0,39 \text{ m} = 39,0 \text{ cm}$$

$$h = d_{\min} + c + \phi_{\text{cov}} + \frac{\phi_{\text{long}}}{2} = 39,0 + 3,0 + 0,63 + \frac{1,25 + 0,05}{2} = 43,3 \text{ cm} \Rightarrow \text{adotado}$$

$$h = 45 \text{ cm}$$

Esta altura terá de ser confirmada após os cálculos dos momentos fletores e da verificação da altura mínima necessária para o estado limite último e armadura simples, como visto no capítulo 3, e possivelmente precisará ser aumentada.

### c) Cargas na viga V101

Com o valor inicial adotado para a altura da viga, determinam-se as ações na laje e na viga.

Cargas na laje:

- peso próprio da laje (Quadro A2.3, Anexo 2):  $g_1 = 1,61 \text{ kN/m}^2$ ;
- sobrecarga:  $g_2 = 1,5 \text{ kN/m}^2$ ;
- carga total na laje:  $g_1 + g_2 + q = 1,61 + 1,5 + 4,0 = 7,11 \text{ kN/m}^2$ .

Cargas na viga:

Parede:	$0,25 \cdot 3 \cdot 18 =$	13,5 kN/m
$g_1$ (peso próprio):	$0,25 \cdot 0,45 \cdot 25 =$	2,8 kN/m
$p_{\text{laje}}$ :	$\left(\frac{4+5}{2}\right) \cdot (7,11) =$	32,0 kN/m
Total:	$13,5 + 2,8 + 32,0 =$	48,3 kN/m

### d) Cálculo dos momentos fletores atuantes na viga V101 (processo dos esforços)

Os momentos fletores serão determinados pelo processo de esforços. Na Figura 4.13 estão o esquema estrutural da viga e os diagramas dos momentos  $M_0$  e  $M_1$  necessários para montar a equação de compatibilidade:  $X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{10} = 0$ , em que (fazendo  $\ell_1 = \ell_2 = \ell$ ):

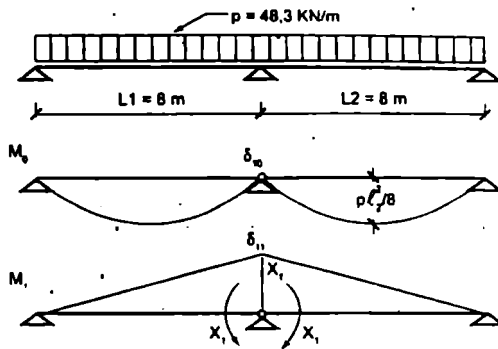


Figura 4.13 Esquema para cálculo dos momentos da viga V101.

$\delta_{10}$  - deslocamento no sistema básico (0), com carga real, devido à retirada do vínculo na direção da incógnita  $X_1$ , obtido pela integração do produto  $M_0 \cdot M_1$ :

$$\delta_{10} = \int_0^{\ell} \frac{M_1 \cdot M_0}{E \cdot I} dx = -\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left( \ell_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{p \cdot \ell_1^2}{8} \cdot 1 + \ell_2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{p \cdot \ell_2^2}{8} \cdot 1 \right) = -\frac{2 \cdot p \cdot \ell^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$\delta_{11}$  - deslocamento no sistema 1, na direção da incógnita  $X_1$ , devido a um esforço unitário também na direção de  $X_1$ , obtido pela integração do produto  $M_1 \cdot M_1$ :

$$\delta_{11} = \int_0^{\ell} \frac{M_1 \cdot M_0}{E \cdot I} dx = -\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left( \ell_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 + \ell_2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \right) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left( \frac{\ell_1}{3} + \frac{\ell_2}{3} \right) = \frac{2 \cdot \ell}{3 \cdot E \cdot I}$$

A equação de compatibilidade fica:  $X_1 \cdot \frac{2 \cdot \ell}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{2 \cdot p \cdot \ell^3}{24 \cdot E \cdot I} = 0$

resultando  $X_1 = \frac{p \cdot \ell^2}{8} = \frac{48,3 \cdot 8^2}{8} = 386,4 \text{ kNm}$  (momento fletor no apoio central da viga).

e) Cálculo da altura mínima

Será verificada para a seção mais desfavorável (seção do apoio,  $M = 386,4 \text{ kNm}$ ). Com  $\epsilon_{pd} = 2,07\%$  (CA50) e  $\epsilon_c = 3,5\%$ , resulta para  $\xi$ :

$$\xi = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_{pd}} = \frac{3,5}{3,5 + 2,07} = 0,63$$

e, com  $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$  ( $20000 \text{ kN/m}^2$ ), obtém-se a altura mínima (equação 3.43, capítulo 1):

$$d_{\min} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd}}} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{1,4 \cdot 386,4 \cdot 1,4}{0,25 \cdot 20000}} = 0,78 \text{ m}$$

Como se observa, resultou altura mínima bem maior que a estimada anteriormente (45 cm); será adotado para a altura total o valor  $h = 0,90 \text{ m}$  e, para a altura útil,  $d = 0,80 \text{ m}$ .

f) Cálculo do novo carregamento e dos novos momentos fletores (positivo e negativo)  
Com a nova altura adotada, a carga sobre a viga sofrerá um acréscimo, e os valores dos momentos fletores também aumentarão:

- acréscimo do peso próprio:  $(0,90 - 0,45) \cdot 0,25 \cdot 25 = 2,81 \text{ kN/m}$ ;
- carga total sobre a viga:  $p = 48,3 + 2,81 = 51,1 \text{ kN/m}$ ;
- novo momento fletor (negativo) no apoio (o problema é linear com  $p$ ):

$$M_{\text{apoio}} = \frac{51,1}{48,3} \cdot 386,4 = 408,8 \text{ kNm} \quad \text{ou} \quad M_{\text{apoio}} = \frac{51,1 \cdot 8^2}{8} = 408,8 \text{ kNm}$$

- momento fletor máximo (positivo) no tramo: pode ser encontrado sabendo-se que na seção onde a força cortante se anula (seção S, Figura 4.14) o momento é máximo; tem-se:

$$V_s = R - p \cdot x = \left( \frac{51,1 \cdot 8}{2} - \frac{408,8}{8} \right) - 51,1 \cdot x = 153,3 - 51,1 \cdot x = 0 \rightarrow x = 3,00 \text{ m}$$

$$M_{\text{máx}(x=3)} = \int V_s = 153,3 \cdot x - 51,1 \cdot \frac{x^2}{2} = 153,3 \cdot 3 - 51,1 \cdot \frac{3^2}{2} = (459,9 - 229,9) \text{ kNm}$$

$$M_{\text{máx}} = 230 \text{ kNm}$$

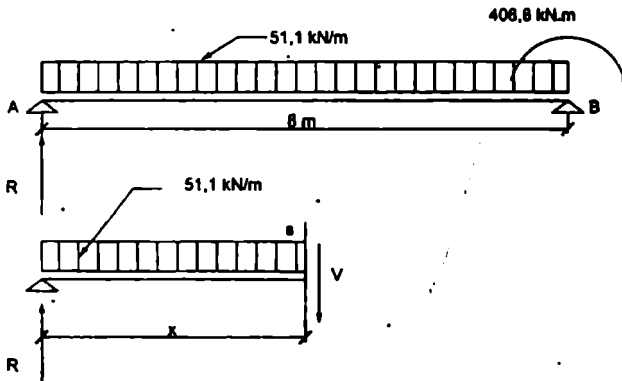


Figura 4.14 Força cortante em uma seção s da viga.

Com o momento fletor de 408,8 kNm, a altura mínima deve ser calculada novamente para verificar se não é maior que a adotada. No caso, resultou altura mínima de 80 cm, exatamente o valor adotado.

g) Cálculo da área ( $A_s$ ) necessária da armadura longitudinal

- Momento negativo (seção do apoio:  $M = 408,8$  kNm)

$$KMD = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{1,4 \cdot 408,8}{0,25 \cdot 0,80^2 \cdot 20000 / 1,4} = 0,25$$

Pelo Quadro 3.1:

$$KMD = 0,25 \rightarrow KZ_1 = 0,8208 \text{ e } \epsilon_s = 4,3144\% > \epsilon_{yd} = 2,07\% \rightarrow f_s = f_{yd}$$

$$A_{s, \text{long}} = \frac{M_d}{(KZ) \cdot d^2 \cdot f_{yd}} = \frac{1,4 \cdot 408,8}{0,8208 \cdot 0,80 \cdot 50 / 1,15} = 20,05 \text{ cm}^2$$

Usando  $\phi \frac{1}{2}$ " (12,5 mm; 1,25 cm<sup>2</sup>): n° de barras = 20,05/1,25 = 16,04 → adotam-se 16 barras.

- Momento positivo (seção no tramo:  $M = 230$  kNm)

$$KMD = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{1,4 \cdot 230}{0,25 \cdot 0,80^2 \cdot \frac{20000}{1,4}} = 0,14$$

$$KMD = 0,14 \text{ (Quadro 3.1)} \rightarrow KZ = 0,9094 \text{ e } \epsilon_s = 10,00\% > \epsilon_{yd} = 2,07\% \rightarrow f_s = f_{yd}$$

$$A_{s, \text{long}} = \frac{M_d}{(KZ) \cdot d \cdot f_{yd}} = \frac{1,4 \cdot 230}{0,9094 \cdot 0,80 \cdot 50 / 1,15} = 10,18 \text{ cm}^2$$

Usando  $\phi \frac{1}{2}$ " (12,5 mm; 1,25 cm<sup>2</sup>): n° de barras = 10,18/1,25 = 8,14 → adotam-se 8 barras.

h) Verificação das armaduras mínima e máxima

- Armadura mínima:

$$A_{s, \text{min}} = \rho_{\text{min}} \cdot A_c = \rho_{\text{min}} \cdot b_w \cdot h = \frac{0,15}{100} \cdot 25 \cdot 90 = 3,38 \text{ cm}^2$$

sendo  $\rho_{\text{min}} = 0,15\%$  para  $f_{cd} = 20$  MPa e seção retangular (Quadro 4.2).

Esse valor é menor que a área total (real)  $A_s$  no tramo ( $8 \phi 12,5 = 8 \cdot 1,25 = 10,0 \text{ cm}^2$ ) e no apoio ( $16 \phi 12,5 = 16 \cdot 1,25 = 20 \text{ cm}^2$ ).

- Armadura máxima:

$$(A_s + A_s') \leq \frac{4}{100} \cdot A_c \leq \frac{4}{100} \cdot 25 \cdot 90 \leq 90 \text{ cm}^2$$

Esse aspecto está atendido, pois a viga não tem armadura comprimida, e a máxima armadura tracionada é a do apoio, com  $20 \text{ cm}^2$ .

### i) Detalhamento da seção transversal

#### i1) Espaçamento horizontal

O espaçamento horizontal, livre ( $a_h$ ), entre barras, deve estar de acordo com o prescrito na ABNT NBR 6118:2014:

$$a_h \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi(\text{diâmetro da barra}) \\ 1,2 \cdot d_{\text{máx}} \text{ (diâmetro máximo do agregado)} \end{cases}$$

No problema, considerando distâncias medidas de centro a centro das barras, e que para o detalhamento deve ser acrescentado ao diâmetro de cada barra a saliência da mocha do ferro ( $0,04 \cdot 1,25 = 0,05 \text{ cm}$ ), e com brita 2 ( $d_{\text{máx}} = 2,5 \text{ cm}$ ), resulta para o espaçamento horizontal  $a_h$ :

$$a_h \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \rightarrow 2 + 1,25 + 0,05 = 3,30 \text{ cm} \\ \phi(1,25 + 0,05) \rightarrow 1,25 + 0,05 + 1,25 + 0,05 = 2,60 \text{ cm} \\ 1,2 \cdot d_{\text{máx}} \rightarrow 1,2 \cdot 2,5 + 1,25 + 0,05 = 3,00 + 1,25 + 0,05 = 4,30 \text{ cm} \end{cases}$$

O espaço disponível por camada, considerando estribos de  $\phi 6,3 \text{ mm}$  e cobrimento lateral de  $3 \text{ cm}$  de cada lado, é (Figura 4.15):

$$a = 25 - 2 \cdot \left( 3 + 0,63 + \frac{1,25 + 0,05}{2} \right) = 16,44 \text{ cm}$$

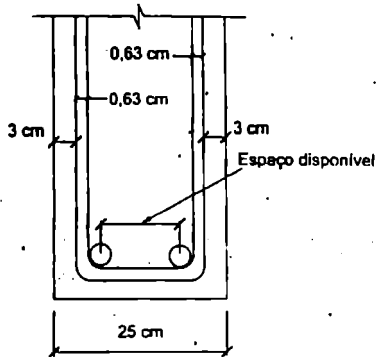


Figura 4.15 Espaço disponível entre as armaduras externas.

Assim, em cada camada é possível haver “n” número de espaços entre barras:

$$n = 16,44/4,30 = 3,82$$

- Número máximo de espaços entre barras nas camadas:  $n = 3$ .
- Número máximo de barras em cada camada:  $b = n + 1 = 3 + 1 = 4$ .

Para a seção do apoio (momento negativo) adotou-se o esquema da Figura 4.16a, de 4 camadas com 4 barras cada (3 espaços), considerando a possibilidade da passagem de vibrador no centro, para facilidade de execução e concretagem.

Para a seção do tramo (momento positivo) foi adotado o esquema da Figura 4.16b, de 2 camadas com 4 barras cada, também com espaço para a passagem de vibrador.

#### i2) Espaçamento vertical

Na determinação do espaçamento vertical ( $a_v$ ) entre as barras, também foi acrescentado ao diâmetro das barras o valor das mossas (0,05 cm).

$$a_v \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \rightarrow 2 + 1,25 + 0,05 = 3,30 \text{ cm} \\ \phi(1,25 + 0,5) \rightarrow 1,25 + 0,05 + 1,25 + 0,05 = 2,60 \text{ cm} \\ 0,5d_{\text{max}} \rightarrow 0,5 \cdot 2,5 + 1,25 + 0,05 = 1,25 + 1,25 + 0,05 = 2,55 \text{ cm} \end{cases}$$

Foi adotado um espaçamento vertical de 3,5 cm; as medidas finais estão indicadas nas figuras 4.16a e 4.16b.

#### i3) Verificação da altura útil (seção do apoio, mais desfavorável)

No cálculo de  $A_s$ , arbitrou-se  $d = 80$  cm, e agora é necessário verificar se esse valor está correto; sendo  $y_{cg}$  a distância da borda ao centro de gravidade das barras (no caso da armadura negativa, que é a situação mais crítica), tem-se  $d_{\text{real}} = h - y_{cg}$ .

Para o cálculo de  $y_{cg}$  é necessária a distância de cada camada de armadura à borda superior da viga; a distância da primeira delas, com cobrimento de 3 cm, estribo de  $\phi = 0,63$  cm e  $\phi_{long.} = (1,25 + 0,05)$  cm é igual a:

$$3,0 + 0,63 + (1,25 + 0,05)/2 = 4,28 \text{ cm}$$

Cada uma das demais camadas está distante da imediatamente anterior em 3,5 cm, resultando para a ordenada do centro de gravidade da armadura negativa da viga, sendo A a área de cada barra:

$$y_{cg} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{4 \cdot A \cdot 4,28 + 4 \cdot A \cdot (4,28 + 3,5) + 4 \cdot A \cdot (4,28 + 2 \cdot 3,5) + 4 \cdot A \cdot (4,28 + 3 \cdot 3,5)}{16 \cdot A}$$

$$y_{cg} = \frac{152,48 \cdot A}{16 \cdot A} = 9,53 \text{ cm}$$

Neste caso, devido à simetria na posição das barras, não havia necessidade do cálculo do centro de gravidade, pois sua posição pode ser obtida de forma imediata. Pode-se agora determinar a altura útil real:

$$d_{real} = 90 - 9,53 = 80,47 \text{ cm} > d_{adotado} = 80 \text{ cm} \therefore \text{está verificado.}$$

Caso  $d_{real}$  fosse menor que  $d_{adotado}$ , seria necessário recalcular  $A_s$  com o  $d_{real}$  e novamente efetuar a verificação.

Na seção de momento máximo do tramo, para o valor real de "d" resulta:

$$d = 90 - (4,28 + 3,5/2) = 90 - (4,28 + 1,75) = 90 - 6,03 = 83,97 \text{ cm, e também está verificado.}$$

#### i4) Verificação da consideração da armadura concentrada (seção do apoio)

Os esforços na armadura só podem ser considerados concentrados no centro de gravidade das barras se a distância deste centro ao ponto da armadura mais afastado da linha neutra (a), medida normalmente a ela, for menor que 10% de h, de acordo com a ABNT NBR 6118:2014; no problema, o centro da primeira camada da armadura (mais distante da linha neutra) está a 4,28 cm da borda, resultando:

$$a = 9,53 - 4,28 = 5,25 \text{ cm} < 0,10 \cdot 90 = 9 \text{ cm} \rightarrow \text{a armadura pode ser considerada concentrada.}$$

#### i5) armadura de pele (na região tracionada)

Como a altura total da viga é maior que 60 cm, é necessária a colocação em cada face, na região tracionada da viga, de uma armadura de pele.

$$A_{s,pele} = 0,10\% \cdot b_w \cdot h = \frac{0,10}{100} \cdot 25 \cdot 90 = 2,25 \text{ cm}^2 \text{ (em cada face, na região tracionada)}$$

Adotando  $\phi$  6,3 mm ( $A_s = 0,32 \text{ cm}^2$ ):  $n = 2,25/0,32 = 7,03 \rightarrow 7$  barras  $\phi$  6,3 mm por face.

A armadura de pele é recomendada para evitar fissuras e, portanto, deveria ser empregada para a condição em serviço; porém, simplificada será usada a condição de estado limite último, e a região tracionada será obtida por meio dos valores já calculados de KMD, lembrando que  $x$  é a profundidade da linha neutra que indica a região comprimida da seção.

Seção do apoio:

- KMD = 0,25,  $kx = 0,4479$ ,  $h - x = 0,90 - (0,4479 \cdot 0,8) = 0,542$  m;
- espaço disponível para colocação da armadura de pele a partir da última camada da armadura longitudinal:  $0,542 - 0,0428 + 3 \cdot 0,035 = 0,542 - 0,1478 = 0,3942$  m;
- espaçamento máximo (7 barras):  $s = 0,3942/7 = 0,056$  m;
- adotado: 7  $\phi$  6,3 a cada 5,5 cm, por face, a partir da barra de tração mais próxima.

Seção do tramo:

- KMD = 0,14,  $kx = 0,2264$ ,  $h - x = 0,90 - (0,2264 \cdot 0,8) = 0,719$  m;
- espaço disponível para colocação da armadura de pele a partir da última camada da armadura longitudinal:  $0,719 - (0,0428 + 0,035) = 0,719 - 0,0778 = 0,641$  m;
- espaçamento máximo (7 barras):  $s = 0,641/7 = 0,092$  m;
- adotado: 7  $\phi$  6,3 a cada 9,0 cm, por face, a partir da barra de tração mais próxima.

i6) Posição final das barras na seção transversal

A posição final de todas as barras na seção transversal está nas figuras 4.16a (seção do apoio) e 4.16b (seção mais solicitada do tramo).

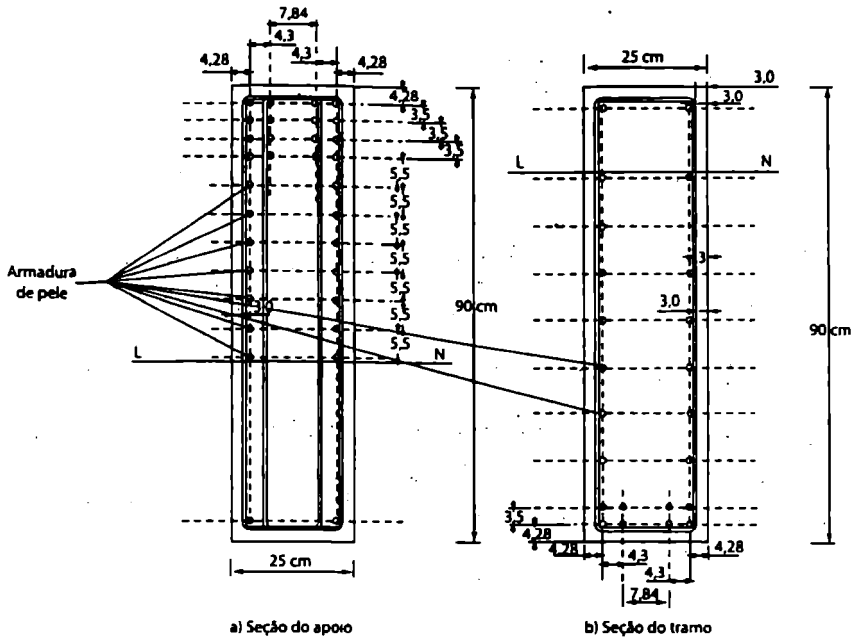


Figura 4.16 Detalhamento das seções transversais mais solicitadas da V101.

#### j) Verificação da fissuração

Para a verificação da fissuração, que será feita a partir da equação 4.5, primeiramente é necessário o cálculo da tensão na armadura, no estágio II, que pode ser feito simplificada-mente com a equação 4.6:

$$\sigma_{st} = \frac{f_{yk}}{1,4 \cdot 1,15} \cdot \frac{g_1 + g_2 + 0,4 \cdot q}{g_1 + g_2 + q} = \frac{500}{1,15 \cdot 1,4} \cdot \frac{5,62 + 27,5 + 0,4 + 18,0}{51,1} = 245 \text{ MPa}$$

com:

$g_1 = 5,62 \text{ kN/m}$  (peso próprio da viga);

$g_2 = 13,5 + (1,61 + 1,50) \cdot \frac{4 + 5}{2} = 13,5 + 14,0 = 27,5 \text{ kN/m}$  (parede mais car-  
ga permanente das duas lajes);

$q = 4,0 \cdot \frac{4 + 5}{2} = 18,0 \text{ kN/m}$  (carga acidental proveniente das duas lajes).

A taxa de armadura ( $\rho_{st}$ ) é obtida pela relação entre a área de uma barra ( $A_b$ ) e a área do retângulo que considera o envolvimento de concreto na barra ( $A_{ct}$ ). Considerando

a barra externa mais próxima da linha neutra (assinalada com um X no desenho da Figura 4.17a), com retângulo equivalente de lados  $a + b$  e  $c + d$ , mostrado na Figura 4.17b, resulta:

$$a = 4,28 \text{ cm};$$

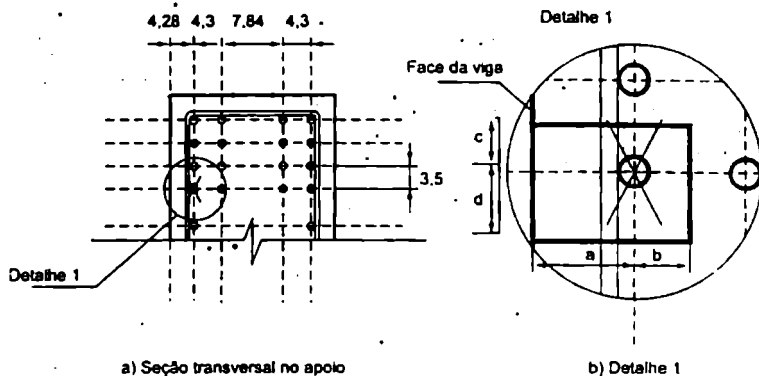
$$b = 4,30/2 = 2,15 \text{ cm};$$

$$c = 3,5/2 = 1,75 \text{ cm};$$

$$d = 7,5 \cdot \phi = 7,5 \cdot 1,25 = 9,375 \text{ cm};$$

$$A_{\text{eq}} = (4,28 + 2,15) \cdot (1,75 + 9,375) = 6,43 \cdot 11,125 = 71,23 \text{ cm}^2;$$

$$\rho_n = A/A_{\text{eq}} = 1,25/71,23 = 1,755 \cdot 10^{-2}.$$



a) Seção transversal no apoio

b) Detalhe 1

Figura 4.17 Barra da seção transversal mais solicitada da V101.

O coeficiente de conformação superficial  $\eta_1$  é igual a 2,25 para barras (nervuradas) de alta aderência (CA50).

Finalmente, estima-se a abertura da fissura pela expressão 4.5:

$$w = \frac{\phi_i}{(12,5 \cdot \eta_1)} \cdot \frac{\sigma_n}{E_s} \cdot \left( \frac{4}{\rho_n} + 45 \right) = \frac{12,5}{12,5 \cdot 2,25} \cdot \frac{245}{210000} \cdot \left( \frac{4}{0,01755} + 45 \right) = 0,142 < 0,3$$

Como esta expressão já apresentou um valor menor que 0,3 (limite de abertura de fissuras para as classes II e III de agressividade ambiental, conforme Quadro 4.5), conclui-se que a fissuração não é nociva.

Para que não haja dúvida sobre a tensão real na barra, ela será determinada por meio de análise mais precisa, com a seção trabalhando no estágio II. São necessárias as seguintes grandezas:

- Relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto:

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{ca}} = \frac{210000}{4760 \cdot \sqrt{f_{ck}}} = \frac{210000}{4760 \cdot \sqrt{20}} = \frac{210000}{21287} = 9,865$$

• Posição da linha neutra no estágio II (expressão 4.16):

$$x_{II} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4 \cdot a_1 \cdot a_3}}{2 \cdot a_1} = \frac{-197,3 \pm \sqrt{197,3^2 + 4 \cdot 12,5 \cdot 15877}}{2 \cdot 12,5} = 28,6 \text{ cm}$$

com:

$$a_1 = b_w/2 = 25/2 = 12,5 \text{ cm};$$

$$a_2 = \alpha_e \cdot A_s = 9,865 \cdot 16 \cdot 1,25 = 197,3 \text{ cm}^2;$$

$$a_3 = -d \cdot \alpha_e \cdot A_s = -(90 - 9,53) \cdot 197,3 = 80,47 \cdot 197,3 = 15877 \text{ cm}^3.$$

• Inércia da seção no estágio II para seção retangular (expressão 4.20):

$$I_{x,u} = \frac{b \cdot x_{II}^3}{3} + \alpha_e \cdot A_s \cdot (x_{II} - d)^2 = \frac{25 \cdot 28,6^3}{3} + 9,865 \cdot 20 \cdot (28,6 - 80,47)^2$$

$$I_{x,u} = 725782 \text{ cm}^4 = 0,00726 \text{ m}^4$$

A tensão em um nível genérico da armadura é:

$$\sigma_s = \frac{M_u}{I_{x,u}} \cdot y_u \cdot \alpha_e = \frac{322,56}{0,00726} \cdot 0,466 \cdot 9,865 = 204248 \text{ kN/m}^2 = 204 \text{ MPa}$$

com:

$$M_{max} = \frac{g_1 + g_2 + 0,4 \cdot q}{g_1 + g_2 + q} \cdot M_{max} = \frac{5,62 + 27,5 + 0,4 \cdot 18,0}{51,1} \cdot 408,8 = 322,56 \text{ kNm (mo-}$$

mento atuante);

$y_u = 90 - 28,6 - 4,28 - 3 \cdot 3,5 = 46,6 \text{ cm}$  (distância da armadura  $i$  até a linha neutra no estágio II).

Novamente, colocando os valores na expressão 4.5:

$$w = \frac{\phi_s}{(12,5 \cdot \eta_s)} \cdot \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \left( \frac{4}{\rho_s} + 45 \right) = \frac{12,5}{12,5 \cdot 2,25} \cdot \frac{204}{210000} \cdot \left( \frac{4}{0,01755} + 45 \right) = 0,118 < 0,3$$

Mostrando mais uma vez que a fissuração nociva não é atingida, tal conclusão pode ser obtida mesmo sem se usar a expressão 4.5, mas apenas consultando o Quadro 4.6, que indica que, para um diâmetro de 12,5 mm, uma tensão inferior a 280 MPa e espaçamento máximo de 15 cm, não há risco de fissuração excessiva.

Se a equação escolhida para a verificação da fissuração tivesse sido a 4.4, resultaria:

$$w = \frac{\phi_i}{12,5 \cdot \eta_i} \cdot \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \cdot \frac{3 \cdot \sigma_{si}}{f_{cr,m}} = \frac{12,5}{12,5 \cdot 2,25} \cdot \frac{204}{210000} \cdot \frac{3 \cdot 204}{2,21} = 0,12 < 0,3$$

com  $f_{cr,m} = 0,3 \cdot f_{ct}^{2/3} = 0,3 \cdot 20^{2/3} = 2,21$  MPa (equação.1.5 do capítulo 1).

Este resultado também indica que não há risco de fissuração nociva.

### Exemplo 2

Verificar o estado de deformação excessiva das lajes do exemplo anterior (admitir que a edificação se destine a fins residenciais), que tem as seguintes características:  $\beta_{16}$  (h = 16 cm); simplesmente apoiada; entreixo de 50 cm; vão de 5,00 m; classe 27;  $A_s = 3,615$  cm<sup>2</sup>; peso próprio  $g_1 = 1,60$  kN/m<sup>2</sup>; sobrecarga permanente  $g_2 = 1,5$  kN/m<sup>2</sup>; carga acidental  $q = 4$  kN/m<sup>2</sup>;  $f_{ct} = 20$  MPa; retirada do escoramento após duas semanas da concretagem; d = 16,0 - 2,1 = 13,9 cm (cobrimento de 1,5 cm e barra de 12,5 mm).

Outros dados:  $f_{ct} = 20$  MPa; aço da treliça do tipo CA60. A seção transversal real e a adotada para o cálculo estão na Figura 4.18.

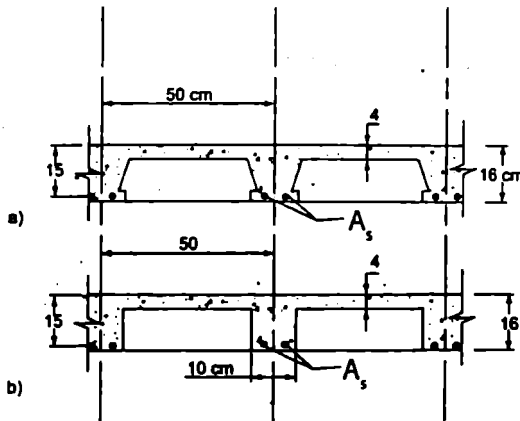


Figura 4.18 Seção transversal da laje  $b_{16}$ : a) seção real; b) seção adotada para o cálculo.

#### a) Características geométricas da seção transversal no estágio I

Para calcular as características geométricas no estágio I, inicialmente sem considerar a presença da armadura, conforme previsto na ABNT NBR 6118:2014 no item

17.3.2.1.1, basta fazê-lo para a seção bruta usando as fórmulas 4.11 e 4.12 da seção 4.8.2.1.

$$y_{cg} = \frac{(b_f - b_w) \cdot \left(\frac{h_f^2}{2}\right) + b_w \cdot \frac{h^2}{2}}{A_g} = \frac{(50 - 10) \cdot \left(\frac{4^2}{2}\right) + 10 \cdot \frac{16^2}{2}}{40 \cdot 4 + 10 \cdot 16} = 5,0 \text{ cm}$$

$$I_{I_g} = \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_w \cdot h^3}{12} + (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot \left(y_{cg} - \frac{h_f}{2}\right)^2 + b_w \cdot h \cdot \left(y_{cg} - \frac{h}{2}\right)^2$$

$$I_{I_g} = \frac{40 \cdot 4^3}{12} + \frac{10 \cdot 16^3}{12} + 40 \cdot 4 \cdot \left(5,0 - \frac{4}{2}\right)^2 + 10 \cdot 16 \cdot \left(5,0 - \frac{16}{2}\right)^2 = 6507 \text{ cm}^4 = 6,51 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

No cálculo das características geométricas no estágio I, poderia ter sido considerada a existência de armadura, tornando a seção homogênea com  $\alpha_c = 9,865$  (calculado a seguir). Nesse caso, a inércia seria  $I_h = 8,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ .

b) Características geométricas da seção transversal no estágio II puro

Para calcular as características da seção no estágio II puro é preciso conhecer, inicialmente, o valor do módulo de deformação longitudinal do concreto para encontrar o valor de  $\alpha_c$  (relação entre os módulos de deformação do aço e do concreto).

$$\alpha_c = \frac{E_s}{E_{cs}} = \frac{210000}{4760 \cdot \sqrt{f_{ct}}} = \frac{210000}{4760 \cdot \sqrt{20}} = \frac{210000}{21287} = 9,865$$

Para o estágio II puro, o valor da posição da linha neutra e o momento de inércia são dados pelas expressões 4.16 a 4.21, destacando que, neste caso,  $A_1' = 0$  e admitindo-se inicialmente a linha neutra passando na mesa ( $x_{II} < h_f$ , seção retangular), de modo que  $b_w = b_f$ .

• Posição (profundidade) da linha neutra:

$$a_1 = b_w/2 = b_f/2 = 50/2 = 25 \text{ cm}$$

$$a_2 = \alpha_c \cdot A_1 = 9,865 \cdot 3,615 = 35,66 \text{ cm}^2$$

$$a_3 = -d \cdot \alpha_c \cdot A_1 = -13,9 \cdot 9,865 \cdot 3,615 = -495,7 \text{ cm}^3$$

$$x_{II} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4 \cdot a_1 \cdot a_3}}{2 \cdot a_1} = \frac{-35,66 + \sqrt{35,66^2 + 4 \cdot 25 \cdot 495,7}}{2 \cdot 25} = 3,8 \text{ cm} < h_f = 4 \text{ cm}$$

- Momento de inércia no estádio II puro:

$$I_{x,II_0} = \frac{b_f \cdot x^3}{3} + \alpha_e \cdot A_s \cdot (x - d)^2 = \frac{50 \cdot 3,8^3}{3} + 9,865 \cdot 3,615 \cdot (3,8 - 13,9)^2 =$$

$$= 4552 \text{ cm}^4 (4,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4)$$

- c) Cálculo das flechas para as diversas combinações

As flechas para as diversas combinações de ações podem ser calculadas pela expressão:

$$a = \frac{5 \cdot p \cdot \ell^4}{384 \cdot E_c \cdot I_m}$$

sendo  $E_c = 21287 \text{ MPa}$  e  $I_m$  a inércia média de Branson (expressão 4.23):

$$I_m = \left( \frac{M_r}{M_{cr}} \right)^3 \cdot I_{I_g} + \left[ 1 - \left( \frac{M_r}{M_{cr}} \right)^3 \right] \cdot I_{x,II_0}$$

O momento de fissuração  $M_r$ , no caso para a seção "T", é dado pela equação 4.25, sendo  $I_g$  o momento de inércia da seção bruta de concreto (aqui foi chamado de  $I_{I_g}$ ) e  $y_t$  a distância do centro de gravidade da seção bruta à fibra mais tracionada:

$$M_r = \frac{\alpha \cdot f_{ct,m} \cdot I_{I_g}}{y_t} = \frac{1,2 \cdot 2210 \cdot 6,51 \cdot 10^{-5}}{(0,16 - 0,05)} = 1,57 \text{ kNm}$$

com  $f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ct}^{2/3} = 0,3 \cdot 20^{2/3} = 2,21 \text{ MPa} = 2210 \text{ kN/m}^2$ .

Os momentos atuantes são dados por:

$$M_{ur} = \frac{p \cdot \ell^2}{8}$$

sendo  $p$  a carga em cada nervura e  $\ell$  o vão, neste caso, igual a 5 m.

As cargas  $p$  atuantes por nervura (largura da mesa de 50 cm) serão calculadas para as combinações permanente, quase permanente e rara:

- permanente:  $p_1 = (g_1 + g_2) \cdot 0,5 = (1,6 + 1,5) \cdot 0,5 = 1,55 \text{ kN/m}$  (por nervura);
- quase permanente:  $p_2 = (g_1 + g_2 + 0,3 \cdot q) \cdot 0,5 = (1,6 + 1,5 + 0,3 \cdot 4) \cdot 0,5 = 2,15 \text{ kN/m}$  (por nervura);
- rara:  $p_3 = (g_1 + g_2 + q) \cdot 0,5 = (1,6 + 1,5 + 4) \cdot 0,5 = 3,55 \text{ kN/m}$  (por nervura).

As flechas, calculadas para as três combinações, deverão atender aos limites dados no Quadro 4.7 para a condição de aceitabilidade sensorial:

- para a totalidade de cargas:  $\ell/250$ ;
- para a carga acidental:  $\ell/350$ .

No Quadro 4.12 estão as inércias médias de Branson e as respectivas flechas.

Quadro 4.12 Inércia média e flechas para as diversas combinações.

Ação	$p$ (kN/m)	$M_{\text{m}} = M_{\text{máx}}$ (kN.m)	$\frac{M_{\text{t}}}{M_{\text{máx}}}$	$I_{\text{m}}$ (m <sup>4</sup> )	$p/I_{\text{m}}$	$a$ (cm)
Permanente	1,55	4,84	0,324	$4,57 \cdot 10^{-5}$	33917	1,30
Quase permanente	2,15	6,72	0,234	$4,53 \cdot 10^{-5}$	47461	1,81
Rara	3,55	11,09	0,142	$4,51 \cdot 10^{-5}$	78714	3,01

A flecha devida à carga acidental é dada pela diferença entre a carga total (combinação rara) e a carga permanente:

$$a_q = 3,01 - 1,30 = 1,71 \text{ cm} > a_{\text{limite}} = \frac{\ell}{350} = 1,43 \text{ cm}$$

d) Determinação do efeito da fluência

O cálculo do efeito da fluência é realizado com a combinação quase permanente (2,15 kN/m), cujo momento resultante é 6,72 kNm, e com as equações do item 4.8.2.4.

O tempo  $t_0$  (idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração, no caso 14 dias) fica:

$$t_0 = 14/30 = 0,47$$

Os coeficientes  $\xi$  para as idades  $t_0 = 0,47$  e para o tempo infinito são:

$$\xi(t_0) = 0,68 \cdot 0,996^{t_0} \cdot t_0^{0,12} = 0,68 \cdot 0,996^{0,47} \cdot 0,47^{0,12} = 0,53;$$

$$\xi(\infty) = 2 \text{ (valor fixo para idade maior que 70 meses).}$$

Como não há armadura comprimida, então  $\rho' = 0$ , resultando para o fator  $\alpha_f$ :

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50 \cdot \rho'} = \frac{2 - 0,53}{1} = 1,47$$

O valor da flecha total no tempo infinito será a flecha devida à carga obtida pela combinação quase permanente multiplicada por  $(1 + \alpha_f)$ :

$$a_{\text{total},\infty} = 1,81 \cdot (1 + 1,47) = 4,47 \text{ cm} > \frac{\ell}{250} = 2 \text{ cm}$$

Porém, pode ser dada uma contraflecha de até (ver nota 2 do Quadro 4.8):

$$a_{cf} = -\frac{\ell}{250} = -1,42 \text{ cm}$$

Resultando assim

$$a_{total,m} = 4,47 - 1,42 = 3,05 > \frac{\ell}{250} = 2 \text{ cm}$$

e a condição de deformação não estaria atendida.

Neste caso, seria necessário, por exemplo, fazer a continuidade desta laje com a adjacente de vão igual a 4 m ou, então, aumentar a sua altura, o que é feito no exemplo seguinte.

### Exemplo 3

Refazer o exemplo anterior considerando que a laje seja  $\beta_{20}$  ( $h = 20 \text{ cm}$ ,  $h_f = 6 \text{ cm}$  e  $b_w = 10 \text{ cm}$ ), simplesmente apoiada, com intereixo de 50 cm, vão igual a 5,00 m, classe 27 ( $A_c = 3,615 \text{ cm}^2$ ); peso próprio  $g_1 = 2,2 \text{ kN/m}^2$ ,  $g_2 = 0,9 \text{ kN/m}^2$ ,  $q = 4 \text{ kN/m}^2$ ,  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$ , retirada do escoramento após duas semanas da concretagem. Admitir  $d = 18 \text{ cm}$ . A sobrecarga permanente  $g_2$  foi reduzida, neste exemplo, de  $1,5 \text{ kN/m}^2$  para  $0,9 \text{ kN/m}^2$  para manter a carga permanente total empregada nos exemplos anteriores.

#### a) Características geométricas no estádio I

Os valores são calculados como no exercício anterior, obtendo-se:

- $y_i = 13,82 \text{ cm}$  (distância do centro de gravidade à borda tracionada); e
- $I_{gk} = 1,27 \cdot 10^{-4}$  (momento de inércia da seção geométrica (bruta) de concreto, sem armadura).

#### b) Características geométricas no estádio II puro

Também não serão aqui repetidos os cálculos, mas apenas indicados os principais valores encontrados.

- Módulo de deformação longitudinal do concreto:  $E_c = 2,1 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$
- Relação entre os módulos de deformação do aço e do concreto:  $\alpha_c = 9,865$
- Resistência à tração do concreto:  $f_{ct,m} = 2,21 \text{ MPa} = 2210 \text{ kN/m}$

- Momento de fissuração:

$$M_f = \frac{\alpha_c \cdot f_{ct,m} \cdot I_{gk}}{y_i} = \frac{1,2 \cdot 2210 \cdot 1,27 \cdot 10^{-4}}{0,1382} = 2,44 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- Linha neutra no estádio II com  $A_s = 0$  e admitindo que a linha neutra passe na mesa ( $x_{II} < h_f$ ):

$$a_1 = (b/2) = 25 \text{ cm}$$

$$a_2 = \alpha_c \cdot A_s = 9,865 \cdot 3,615 = 35,66 \text{ cm}^2$$

$$a_3 = -d \cdot \alpha_c \cdot A_s = -18 \cdot 9,865 \cdot 3,615 = -642 \text{ cm}^3$$

$$x_{II} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4 \cdot a_1 \cdot a_3}}{2 \cdot a_1} = \frac{-35,66 + \sqrt{35,66^2 + 4 \cdot 25 \cdot 642}}{2 \cdot 25} = 4,4 \text{ cm} < h_r = 6 \text{ cm}$$

- Momento de inércia no estágio II puro:

$$I_{x,II_0} = \frac{b_f \cdot x^3}{3} + \alpha_c \cdot A_s \cdot (x-d)^2 = \frac{50 \cdot 4,4^3}{3} + 9,865 \cdot 3,615 \cdot (4,4 - 18)^2 = 8016 \text{ cm}^4 (8,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4)$$

### c) Cálculo das flechas para as diversas combinações:

As cargas  $p$  atuantes por nervura (largura da mesa de 50 cm) serão calculadas para as combinações permanente, quase permanente e rara, e com o peso próprio  $g_1 = 2,2 \text{ kN/m}^2$  e sobrecarga permanente  $g_2 = 0,9 \text{ kN/m}^2$  resultam nos mesmos valores do Quadro 4.12 do exercício anterior, que será parcialmente utilizado para a construção do Quadro 4.13:

Quadro 4.13 Inércia média e flechas para as diversas combinações.

Ação	$p$ (kN/m)	$M_{máx} = M_{mín}$ (kN.m)	$\frac{M_r}{M_{mín}}$	$I_m$ (m <sup>4</sup> )	$p/I_m$	$a$ (cm)
Permanente	1,55	4,84	0,504	$8,60 \cdot 10^{-5}$	18023	0,69
Quase permanente	2,15	6,72	0,363	$8,22 \cdot 10^{-5}$	26156	1,00
Rara	3,55	11,09	0,220	$8,05 \cdot 10^{-5}$	44099	1,69

O cálculo da flecha de carga acidental é dado por:

$$a_q = 1,69 - 0,69 = 1,00 \text{ cm} < a_{lím,inf} = \frac{\ell}{350} = 1,42 \text{ cm}$$

### d) Determinação do efeito da fluência

O cálculo do efeito da fluência é realizado da mesma forma que no exercício anterior, resultando em:

$$\alpha_f = \frac{\Delta \xi}{1 + 50 \cdot \rho'} = \frac{2 - 0,53}{1} = 1,47$$

Assim, a flecha final no tempo infinito será igual a:

$$a_{\text{total,ex}} = 1,00 \cdot (1 + 1,47) = 2,47 \text{ cm} > \frac{\ell}{250} = 2 \text{ cm}$$

Porém, pode ser dada uma contraflecha de até (ver nota 2 do Quadro 4.8):

$$a_{\text{cf}} = -\frac{\ell}{350} = -1,42 \text{ cm}$$

Resultando assim:

$$a_{\text{total,ex}} = 2,47 \text{ cm} - 1,42 = 1,05 \text{ cm} < \frac{\ell}{250} = 2 \text{ cm}$$

e a condição de deformação estaria atendida.

### Observações a respeito dos exemplos:

- Na verificação do estado limite de deformação excessiva da laje é preciso também levar em conta as deformações das vigas de apoio.<sup>26</sup>
- Se for considerada a continuidade da laje pré-fabricada, observa-se que há dois tipos de seção: uma com  $b_w = 50 \text{ cm}$  (usada nos exemplos), sujeita a momentos positivos, e outra com  $b_w = 10 \text{ cm}$ , sujeita a momentos negativos na região próxima ao apoio. Neste caso, o emprego da expressão de Branson não é simples, e devem ser usados outros procedimentos, como em Carvalho,<sup>27</sup> ou como já fazem alguns programas comerciais de cálculo estrutural, o que pode ser visto em Santine.<sup>28</sup>
- Resultados experimentais preliminares realizados em lajes pré-fabricadas unidirecionais parecem indicar que valor de  $\alpha_p$  proposto pela ABNT NBR 6118:2014, subestima as flechas.<sup>29</sup>

## ADENDO

### RESUMO DAS EXPRESSÕES RELACIONADAS NESTE CAPÍTULO

Momento fletor mínimo

$$M_{d,\text{min}} = 0,8 \cdot W_0 \cdot f_{\text{ctf,sup}} \quad (4.1)$$

Armadura de pele

26 Flório (2003).

27 Carvalho (1994).

28 Santine (2005).

29 Katszoka (2005) e Rogge et al. (2002).

$$A_{s,pedr} = 0,10\% \text{ de } A_{c,alma} = \frac{0,10}{100} \cdot A_{c,alma} \quad (4.2)$$

Combinação quase permanente para ELSW

$$F_{d,quase\text{ permanente}} = \Sigma F_{gt} + 0,4 \cdot F_{qt} \quad (4.3)$$

Válido para obras residenciais

Abertura máxima de fissura (W)

$$w = \frac{\phi_i}{12,5 \cdot \eta_i} \cdot \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \cdot \frac{3 \cdot \sigma_{si}}{f_{ct,m}} \quad (4.4)$$

Abertura máxima de fissura (W)

$$w = \frac{\phi_i}{(12,5 \cdot \eta_i)} \cdot \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \cdot \left( \frac{4}{\rho_{si}} + 45 \right) \quad (4.5)$$

Valor aproximado da tensão na armadura no estágio II

$$\sigma_{si} = \frac{f_{vd}}{1,4} \cdot \frac{g_1 + g_2 + 0,4 \cdot q}{g_1 + g_2 + q} = \frac{f_{yk}}{1,4 \cdot 1,15} \cdot \frac{g_1 + g_2 + 0,4 \cdot q}{g_1 + g_2 + q} \quad (4.6)$$

Deslocamento a em um ponto de uma viga

$$a = \int_{x=0}^{x=l} \frac{M_0 \cdot M_1}{E \cdot I} dx \quad (4.7)$$

Área equivalente de concreto em relação a uma área de aço  $A_s$

$$A_{c,eq} = A_s \cdot \alpha_e \quad (4.8)$$

Expressão da linha neutra  $x_1$  para seção retangular homogeneizada (estádio I)

$$\frac{b \cdot x_1^2}{2} = \frac{b \cdot (h - x_1)^2}{2} + A_s \cdot (\alpha_e - 1) \cdot (d - x_1) \quad (4.9)$$

Área da seção geométrica no estágio I

$$A_g = (b_f - b_w) \cdot h_f + b_w \cdot h \quad (4.10)$$

Centro de gravidade da seção geométrica (bruta) no estágio I

$$y_{cg} = \frac{(b_f - b_w) \cdot \left( \frac{h_f^2}{2} \right) + b_w \cdot \frac{h^2}{2}}{A_g} \quad (4.11)$$

Momento de inércia à flexão da seção geométrica (bruta) no estádio I	
$I_s = \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_w \cdot h^3}{12} + (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot \left( y_{cg} - \frac{h_f}{2} \right)^2 + b_w \cdot h \cdot \left( y_{cg} - \frac{h}{2} \right)^2 \quad (4.12)$	
Área da seção homogeneizada no estádio I	
$A_h = (b_f - b_w) \cdot h_f + b_w \cdot h + A_s \cdot (\alpha - 1) \quad (4.13)$	
Centro de gravidade da seção homogeneizada no estádio I	
$y_h = \frac{(b_f - b_w) \cdot \left( \frac{h_f^2}{2} \right) + b_w \cdot \frac{h^2}{2} + A_s \cdot (\alpha - 1) \cdot d}{A_h} \quad (4.14)$	
Momento de inércia à flexão da seção homogeneizada no estádio I	
$I_h = \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_w \cdot h^3}{12} + (b_f - b_w) \cdot h_f \cdot \left( y_h - \frac{h_f}{2} \right)^2 + b_w \cdot h \cdot \left( y_h - \frac{h}{2} \right)^2 + A_s \cdot (\alpha - 1) \cdot (y_h - d)^2 \quad (4.15)$	
Equação do 2º grau para a posição $x_{II}$ da linha neutra no estádio II puro	
$a_1 \cdot x_{II}^2 + a_2 \cdot x_{II} + a_3 = 0 \quad (4.16)$	
Posição $x_{II}$ da linha neutra no estádio II puro	
$x_{II} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4 \cdot a_1 \cdot a_3}}{2 \cdot a_1} \quad (4.17)$	
Coeficiente $a_1$ das equações 4.16 e 4.17	
$a_1 = b_w / 2 \quad (4.18)$	
Coeficiente $a_2$ das equações 4.16 e 4.17	
$a_2 = h_f \cdot (b_f - b_w) + (\alpha_c - 1) \cdot A_s' + \alpha_c \cdot A_s \quad (4.19)$	
Coeficiente $a_3$ das equações 4.16 e 4.17	
$a_3 = -d \cdot (\alpha_c - 1) \cdot A_s' - d \cdot \alpha_c \cdot A_s - \frac{h_f^2}{2} \cdot (b_f - b_w) \quad (4.20)$	
Momento de inércia no estádio II puro com $x_{II} \leq h_f$	
$I_{s,II} = \frac{b_f \cdot x_{II}^3}{3} + \alpha_c \cdot A_s \cdot (x_{II} - d)^2 + (\alpha_c - 1) \cdot A_s' \cdot (x_{II} - d)^2 \quad (4.21)$	

Momento de inércia no estágio II puro com  $x_{II} > h_f$

$$I_{x_{II_0}} = \frac{(b_f - b_w) \cdot h_f^3}{12} + \frac{b_w \cdot x_{II}^3}{3} + (b_f - b_w) \cdot \left(x_{II} - \frac{h_f}{2}\right)^2 + \alpha_c \cdot A_s \cdot (x_{II} - d)^2 + (\alpha_c - 1) \cdot A_s' \cdot (x_{II} - d')^2 \quad (4.22)$$

Inércia média de Branson

$$I_m = \left(\frac{M_f}{M_u}\right)^n \cdot I_1 + \left[1 - \left(\frac{M_f}{M_u}\right)^n\right] \cdot I_{II} \quad (4.23)$$

Rigidez equivalente para vigas fletidas

$$(E \cdot I)_{eq,10} = E_c \cdot \left\{ \left(\frac{M_f}{M_s}\right)^3 \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_f}{M_s}\right)^3\right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_c \cdot I_c \quad (4.24)$$

Momento de fissuração

$$M_f = \frac{\alpha \cdot f_{ct,m} \cdot I_c}{y_t} \quad (4.25)$$

Flecha imediata em vigas

$$a = \frac{\alpha_c \cdot p \cdot \ell^4}{(E \cdot I)_{eq}} \quad (4.26)$$

Coefficiente para cálculo de deformação ao longo do tempo (diferida) devida à fluência

$$\alpha_f = \frac{\Delta \xi}{1 + 50 \cdot \rho}$$

$$\xi(t) = \begin{cases} 0,68 \cdot 0,996^t \cdot t^{0,32} & \text{para } t \leq 70 \text{ meses} \\ 2 & \text{para } t \geq 70 \text{ meses} \end{cases} \quad (4.27)$$

Flecha no tempo infinito (imediate mais diferida)

$$a_{\infty} = a_{t0} \cdot (1 + \alpha_f) \quad (4.28)$$

## CAPÍTULO 5

### DETALHAMENTO DA ARMADURA LONGITUDINAL AO LONGO DA VIGA

#### 5.1 INTRODUÇÃO

Uma vez detalhada a armadura longitudinal nas seções transversais mais solicitadas de uma viga de concreto armado, e conhecido o diagrama de momentos fletores, é possível obter o desenvolvimento da armadura ao longo de toda a viga.

O objetivo final do detalhamento é usar as barras de aço (também chamadas de "ferros") com o menor comprimento possível, não deixando de atender todas as condições de segurança do estado limite último (ruína).

Antes de discutir os procedimentos a adotar no detalhamento, é conveniente analisar a possibilidade de racionalizar o processo de fabricação. Em certas situações, é preferível empregar as barras em toda a extensão da viga do que cortar algumas delas com, por exemplo, 20 cm mais curta que o comprimento do elemento estrutural. Em outras palavras, se o custo do trabalho despendido no projeto e na execução da armadura for superior ao custo do material economizado, é preferível optar pelo uso das barras com comprimento igual ao do elemento.

Mostra-se, neste capítulo, que além de determinar, em cada seção, a área necessária de armadura, o projetista deve fazer o detalhamento procurando evitar a ocorrência de fissuração excessiva, efetuar a ancoragem e posicionar as barras de forma correta; de nada adianta calcular com rigor a seção transversal da armadura e det: lhá-la de maneira equivocada.

Entre os diversos procedimentos possíveis para detalhar a armadura ao longo da viga, de forma segura e econômica, o mais indicado e usual é o gráfico, por ser rápido, de fácil visualização e entendimento. Ele pode ser desenvolvido de maneira simples ou complexa, dependendo de cada situação. Assim, se uma viga necessita pouca armadura, por exemplo, se apenas a armadura mínima é suficiente, não é necessário usar o procedimento que se descreverá, pois basta estender essa armadura longitudinal de um apoio a outro.

#### 5.2 QUANTIDADE DE ARMADURA LONGITUDINAL AO LONGO DA VIGA

Seja a viga da Figura 5.1, com o respectivo diagrama de momentos fletores, supondo que sejam necessárias sete barras de  $\phi = 12,5$  mm para resistir ao momento atuante na seção do apoio B. Ao observar o diagrama, vê-se que essas barras "negativas" seriam necessárias apenas no trecho b. Como os momentos decrescem, em módulo, à medida

que se caminha do apoio central para qualquer um dos apoios laterais, deduz-se que em uma seção intermediária S a quantidade de aço necessária é inferior a essas sete barras.

A determinação da armadura necessária na seção S (e em qualquer outra seção) é feita conforme visto no capítulo 3, ou seja, por meio do momento de cálculo na seção é calculada a área da armadura (quantidade de barras); isso deveria ser feito para todas as demais seções do trecho, o que demandaria um grande trabalho. Mais simples, usual e prático é utilizar um procedimento gráfico que permite determinar em quais seções são necessárias 6, 5, 4, 3, 2 e 1 barra de, no caso, 12,5 mm. Assim, inverte-se o problema anterior, ou seja, em vez de determinar quantas barras devem ser usadas na seção S, procura-se graficamente a posição da seção na qual será preciso usar certo número inteiro de barras.

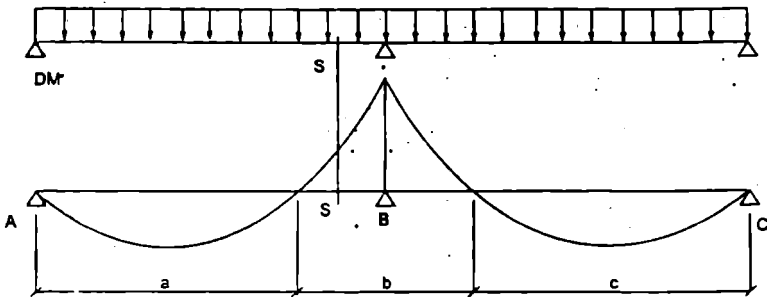


Figura 5.1 Viga contínua e diagrama de momentos fletores correspondente.

O segundo passo do procedimento consiste em admitir que exista linearidade entre o momento fletor e a armadura de aço requerida em uma determinada seção. A relação correta entre estas duas variáveis deve estar de acordo com a expressão 5.1, já vista no capítulo 3:

$$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_{yd}} \quad (5.1)$$

Essa variação não é linear, pois o braço de alavanca  $z$  também varia com  $M_d$ . Entretanto, a favor da segurança, essa relação pode ser tomada como linear, desde que sempre se fixe como referência o momento fletor maior. Tome como exemplo uma viga de seção retangular com as seguintes características:  $b_w = 25$  cm,  $d = 45$  cm, aço CA50 e  $f_{yd} = 20$  MPa; calculando as áreas de aço necessárias para momentos de 100 kNm e 50 kNm, chega-se aos valores de  $A_s = 8,3$  cm<sup>2</sup> e  $A_s = 3,8$  cm<sup>2</sup>, respectivamente. Considerando a linearidade entre os valores e tomando inicialmente o maior momento (100 kNm) como referência, obtém-se para o de 50 kNm uma área de 4,12 cm<sup>2</sup> de aço, quando bastam 3,8 cm<sup>2</sup>, ou seja, a favor da segurança. Se for considerado como

72110  
Rocha

referência o menor momento (50 kNm), tem-se para o de 100 kNm uma área de 7,6 cm<sup>2</sup>, quando são necessários 8,3 cm<sup>2</sup>, estando, nesta situação, contra a segurança. Isso mostra que se pode usar a linearidade entre as áreas e esforços, desde que a referência seja o maior valor do momento.

A partir dessas hipóteses, pode-se proceder ao detalhamento da armadura negativa, conforme indicado na Figura 5.2. O momento no apoio B é dividido em 7 partes iguais ( $k$ ); as divisões devem ser, na verdade, proporcionais à área de cada barra (ou grupo de barras) que compõe a área total. As retas paralelas ao eixo da viga traçadas por esses pontos determinam, ao encontrar o diagrama de momentos, os valores dos comprimentos mínimos das barras. Isso equivale a considerar o diagrama de momentos estratificado, como o da Figura 5.3.

Na verdade, esses procedimentos devem ser feitos não com os diagramas de momento fletor, mas sim com o diagrama de forças nas armaduras.

Em vigas de pontes, pode-se trabalhar com um diagrama de área da armadura, não com o número de barras, que só será definido no final do detalhamento. Nesse caso, não é utilizado o diagrama de momentos fletores solicitantes para uma única situação de carregamento, mas a envoltória dos diagramas de momentos fletores, obtidos para as diversas possibilidades de carregamentos.

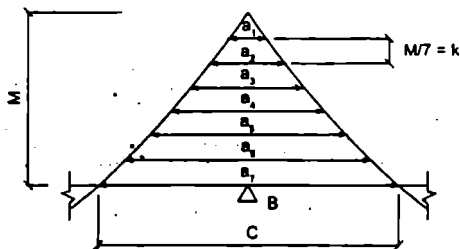


Figura 5.2 Determinação do comprimento das barras negativas.

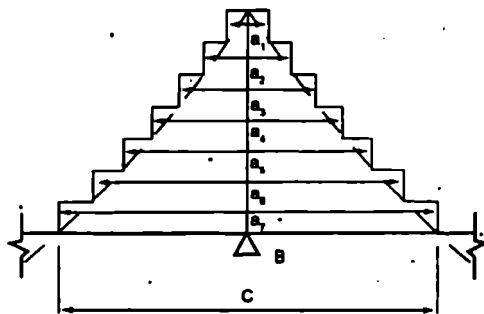


Figura 5.3 Diagrama de momentos estratificado.

Há, também, questões práticas que devem ser consideradas, como a necessidade de que um número mínimo de barras seja levado até os apoios extremos para ancorar as bielas de concreto (capítulo 6), e também a necessidade de empregar, pelo menos, quatro barras (duas na face superior e duas na inferior) trabalhando como “porta-estribos”. Finalmente, o procedimento até aqui descrito para as barras “negativas” deve ser, da mesma forma, empregado para as barras “positivas”.

### 5.3 ANCORAGEM POR ADERÊNCIA DA ARMADURA LONGITUDINAL

Ao definir os pontos de interrupção das barras, em função da distribuição dos momentos fletores solicitantes de cálculo, há a necessidade de transferir para o concreto as tensões a que elas estão submetidas; para isso, as barras devem ser providas de um comprimento adicional. A essa transferência dá-se o nome de **ancoragem**, e o comprimento adicional é chamado de **comprimento de ancoragem reto** ( $l_b$ ).

Segundo o item 9.4.1 da ABNT NBR 6118:2014, todas as barras das armaduras devem ser ancoradas de modo a garantir que os esforços a que estejam submetidas sejam integralmente transmitidos ao concreto, seja por meio de aderência, de dispositivos mecânicos ou pela combinação de ambos. Consideram-se dois tipos básicos de ancoragem:

- a) **Por aderência entre aço e concreto:** quando os esforços são ancorados por meio de um comprimento reto ou com grande raio de curvatura, seguido ou não de gancho.
- b) **Por meio de dispositivos mecânicos:** quando os esforços a ancorar são transmitidos ao concreto por meio de dispositivos mecânicos acoplados à barra.

Na ABNT NBR 6118:2014, as prescrições referentes à aderência estão no item 9.3, e as relacionadas à ancoragem, em seus diversos aspectos, estão no item 9.4, inclusive as referentes a barras transversais soldadas, feixes de barras, telas soldadas, armaduras ativas e dispositivos mecânicos. Por ser mais usual, apenas o emprego da ancoragem por aderência, principalmente em edificações, será aqui apresentado. Inicialmente discutem-se os conceitos básicos do fenômeno da aderência.

#### 5.3.1 ADERÊNCIA ENTRE CONCRETO E AÇO

Aderência é o fenômeno que permite o funcionamento do concreto armado como material estrutural. Sem aderência, as barras da armadura não seriam submetidas aos esforços de tração, pois deslizariam dentro da massa de concreto e a estrutura se comportaria como sendo apenas de concreto simples. A aderência faz com que os dois materiais, de resistências diferentes, tenham a mesma deformação e trabalhem juntos, de modo que os esforços resistidos por uma barra de aço sejam transmitidos para o

concreto e vice-versa. Segundo Leonhardt & Mönning,<sup>30</sup> a aderência é composta de três parcelas:

- **Adesão:** de natureza físico-química, com forças capilares na interface entre os dois materiais; o efeito é de uma colagem provocada pela nata de cimento na superfície do aço;
- **Atrito:** é a força que ocorre na superfície de contato entre os dois materiais, e se manifesta quando há tendência ao deslocamento relativo entre a barra de aço e o concreto, impedindo-o; é variável com o tipo de superfície das barras e devido à penetração da pasta de cimento nas irregularidades das mesmas; é tanto maior quanto maior é a pressão exercida pelo concreto sobre a barra (por isso, o atrito é maior nos apoios e nas partes curvas das barras e também é favorecido pela retração);
- **Engrenamento:** resistência mecânica ao arrancamento devida à conformação superficial das barras, em que as riossas e saliências funcionam como peças de apoio, aplicando forças de compressão no concreto, o que aumenta significativamente a aderência.

Embora esses três efeitos, na prática, não possam ser precisamente avaliados separadamente, de maneira analítica ou experimental, o estudo da aderência é fundamental para quantificá-la e, assim, determinar os comprimentos de ancoragem necessários das barras da armadura.

### 5.3.1.1 Determinação da tensão de aderência

A aderência é um fenômeno complexo; para sua determinação, são efetuados ensaios de arrancamento que possibilitam encontrar valores médios da tensão de aderência; nesses ensaios, é medida a força necessária para arrancar um pedaço de uma barra de aço de um corpo de prova de concreto; supõe-se que, na iminência do arrancamento, toda a tensão atuante na barra seja transferida para o concreto. O esquema do ensaio, juntamente com o desenvolvimento das tensões no aço e no concreto, é mostrado na Figura 5.4, em que:

$F_t$  – força de tração aplicada;

$F_{tm}$  – força de tração última;

$\tau_b$  – tensão de aderência no concreto;

$\tau_{bm}$  – valor último de  $\tau_b$ ;

$\tau_{bm} = \frac{F_t}{\text{área superfície barra}} = \frac{F_t}{\pi \cdot \phi \cdot \ell_b} \rightarrow$  tensão média de aderência no concreto;

$\ell_b$  – comprimento da barra de aço dentro do corpo de concreto;

30 Leonhardt & Mönning (1977).

$\phi$  – diâmetro da barra;  
 $\sigma_s$  – tensão na barra de aço.

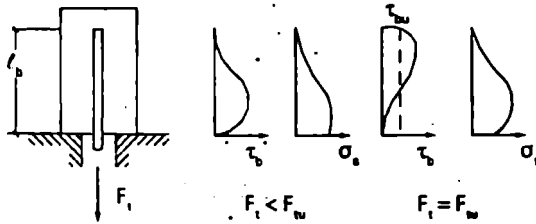


Figura 5.4 Ensaio de arrancamento e diagrama de tensões no aço e no concreto.

A tensão de aderência entre uma barra e o concreto que a envolve pode ser encontrada, analiticamente, a partir de um elemento infinitesimal  $dx$  (Figura 5.5), pelo equilíbrio das forças atuantes na barra e no concreto; assim tem-se:

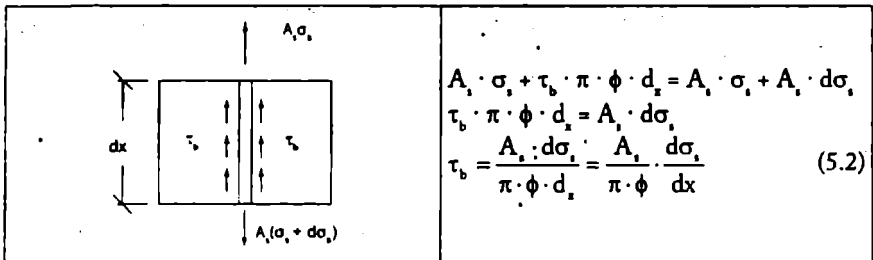


Figura 5.5 Elemento infinitesimal para determinação da tensão de aderência.

As tensões de aderência ( $\tau_b$ ) se opõem à tendência de movimento relativo entre a barra de aço e o concreto e se manifestam na área de contato; elas só existem quando há variação de tensão na barra (se a tração for uniforme, a tensão de aderência será nula). Na norma (item 9.1), a tensão última de aderência é chamada de resistência de aderência de cálculo da armadura passiva ( $f_{ad}$ ), dada pela equação 5.3, que será apresentada a seguir.

### 5.3.1.2 Verificação da aderência entre concreto e armadura

Nas regiões de ancoragem, deve ser verificada a capacidade de transmissão de esforços entre concreto e armadura. Essa verificação se faz por meio da tensão de aderência no estado limite último. Os valores de cálculo de tensões de aderência (resistências de aderência de cálculo) dependem, principalmente, da posição da barra durante a concretagem (regiões propícias ou não à boa aderência), de sua conformação superficial e de seu diâmetro.

Em situações em que exista grande concentração de armadura, com espaçamentos pequenos ou várias camadas de armadura, é necessária também a verificação do fendilhamento, considerando a possibilidade da colaboração de armaduras transversais.

### 5.3.1.3 Regiões favoráveis ou desfavoráveis quanto à aderência

As condições de boa ou má aderência das barras estão definidas no item 9.3.1 da ABNT NBR 6118:2014, que considera em boa situação quanto à aderência os trechos das barras que estejam em uma das seguintes posições:

- a) Com inclinação maior que  $45^\circ$  sobre a horizontal (Figura 5.6a);
- b) Horizontais ou com inclinação menor que  $45^\circ$  sobre a horizontal, desde que:
  - localizados no máximo 30 cm acima da face inferior do elemento ou da junta de concretagem mais próxima, para elementos estruturais com  $h < 60$  cm (Figura 5.6b);
  - localizados no mínimo 30 cm abaixo da face superior do elemento ou da junta de concretagem mais próxima, para elementos estruturais com  $h \geq 60$  cm (Figura 5.6c).

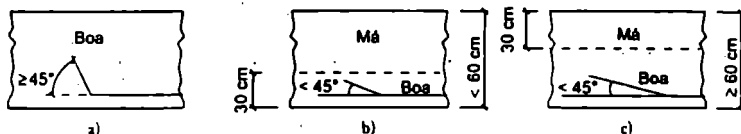


Figura 5.6 Situações de boa e má aderência.

Os trechos das barras situados em outras posições devem ser considerados em má situação quanto à aderência, bem como quando forem utilizadas fôrmas deslizantes.

Em relação à situação b anterior, é pertinente um comentário. Se o elemento de concreto tiver altura maior que 60 cm, mas for concretado em trechos (camadas) de no máximo 30 cm de altura, faz-se o adensamento de cada camada, espera-se o tempo necessário para que o concreto atinja consistência tal que, ao se colocar nova camada, não haja fuga de nata de concreto de uma camada para outra. Com esses cuidados de execução, pode-se dizer que todas as armaduras da peça estão em uma região de boa aderência, portanto de boa ancoragem.

#### 5.3.1.4 Valores das resistências de aderência

A resistência de aderência de cálculo (tensão última de aderência) entre a armadura passiva e o concreto, conforme o item 9.3.2.1 da norma, deve ser determinada pela seguinte expressão:

$$f_{ad} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot f_{cd} \quad (5.3)$$

em que:

$$f_{ctm} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^3}$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot f_{ctm}}{\gamma_c} = \frac{0,21 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^3}}{1,4}$$

é o valor de cálculo da resistência à tração do concreto (MPa);

$\eta_1 = 1,0$  para barras lisas (CA25);

$\eta_1 = 1,4$  para barras entalhadas (CA60);

$\eta_1 = 2,25$  para barras alta aderência (CA50);

$\eta_2 = 1,0$  para situações de boa aderência;

$\eta_2 = 0,7$  para situações de má aderência;

$\eta_3 = 1,0$  para  $\phi < 32$  mm ( $\phi$  é o diâmetro da barra, em mm);

$\eta_3 = \frac{132 - \phi}{100}$  para  $\phi > 32$  mm (com o diâmetro  $\phi$  em milímetros).

### 5.3.2 ANCORAGEM DAS BARRAS

Será abordada a seguir a ancoragem das barras da armadura longitudinal passiva por aderência, de acordo com o que prescreve a ABNT NBR 6118:2014 no item 9.4.2. As barras tracionadas (item 9.4.2.1) podem ser ancoradas com um comprimento retilíneo ou com grande raio de curvatura em sua extremidade. A ancoragem deve se dar:

- obrigatoriamente com gancho (ver seção 5.3.3) para barras lisas;
- sem gancho nas que tenham alternância de sollicitação (tração e compressão);
- com ou sem gancho nos demais casos, não sendo recomendado o gancho para barras de  $\phi > 32$  mm ou para feixes de barras.

As barras comprimidas (também item 9.4.2.1) só poderão ser ancoradas sem ganchos.

#### 5.3.2.1 Comprimento básico de ancoragem

A norma define (item 9.4.2.4) como comprimento reto de ancoragem básico ( $\ell_b$ ) aquele necessário para ancorar a força limite  $A_s \cdot f_{yd}$  em uma barra de diâmetro  $\phi$ , da armadura passiva, admitindo, ao longo desse comprimento, tensão de aderência uniforme e igual a  $f_{ad}$  (equação 5.3). Esse comprimento, que segundo a norma deve ser maior que  $25 \cdot \phi$  ( $\phi$  é o diâmetro da barra), pode ser calculado a partir do equilíbrio entre as forças em ação, conforme a Figura 5.7:

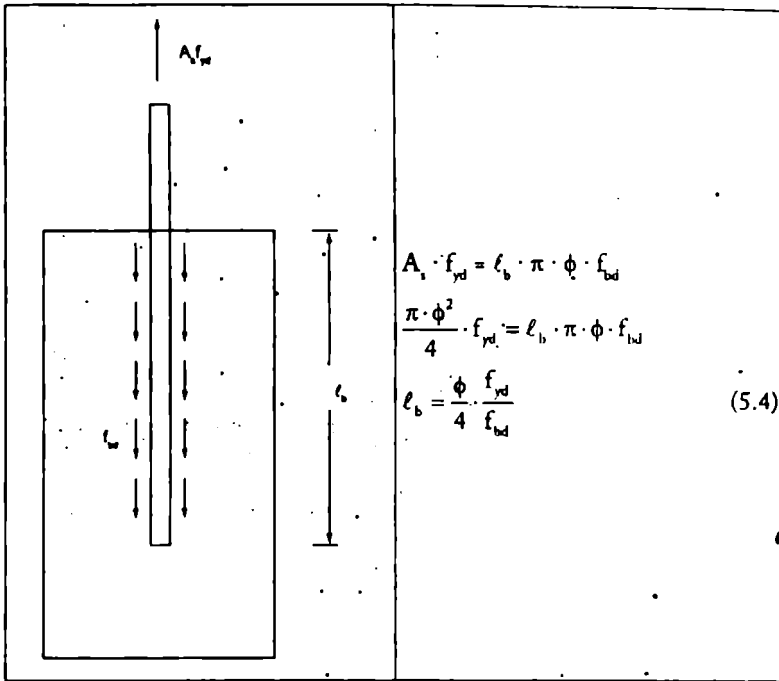


Figura 5.7 Determinação do comprimento básico de ancoragem.

### Exemplo 1

Calcular o comprimento de ancoragem reto básico ( $l_b$ ) para uma barra de  $\phi$  12,5 mm, aço CA50 e  $f_{cd} = 20$  MPa, considerando situação de boa aderência.

O valor de  $l_b$  é encontrado pela equação 5.4:

$$l_b = \frac{\phi^2}{4} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{bd}} = \frac{12,5}{4} \cdot \frac{500}{1,15 \cdot 2,486} = 546,54 \text{ mm} = 54,65 \text{ cm}$$

sendo  $f_{bd}$  obtido com a equação 5.3:

$$f_{bd} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot f_{cd} = 2,25 \cdot 1,0 \cdot 1,0 \cdot 1,105 = 2,486 \text{ MPa}$$

com:

- $\eta_1 = 2,25$  (CA50 para barra usual, nervurada, de alta aderência);
- $\eta_2 = 1,0$  (situação de boa aderência);
- $\eta_3 = 1,0$  ( $\phi = 12,5 \text{ mm} < 32 \text{ mm}$ ).

$$f_{\text{cul}} = \frac{0,21 \cdot \sqrt[3]{f_{\text{ck}}^3}}{1,4} = 0,15 \cdot \sqrt[3]{20^3} = 1,105 \text{ MPa}$$

### 5.3.2.2 Comprimento necessário de ancoragem

Em situações em que a armadura existente (detalhada) em um determinado elemento é maior que a necessária calculada, o comprimento de ancoragem necessário ( $\ell_{b,\text{nex}}$ ) pode ser reduzido, de acordo com o item 9.4.2.5 da norma, sendo calculado por:

$$\ell_{b,\text{nex}} = \alpha_1 \cdot \ell_b \cdot \frac{A_{s,\text{calc}}}{A_{s,\text{ef}}} \geq \ell_{b,\text{min}} \quad (5.5)$$

em que:

$\alpha_1 = 1,0$  (barras sem gancho);

$\alpha_1 = 0,7$  (barras tracionadas com gancho e cobrimento no plano normal ao do gancho  $\geq 3 \cdot \phi$ );

$\ell_b$  = dado pela equação 5.4;

$A_{s,\text{calc}}$  = área de armadura calculada para resistir ao esforço solicitante;

$A_{s,\text{ef}}$  = área de armadura efetiva (existente);

$\ell_{b,\text{min}}$  = maior valor entre  $0,3 \cdot \ell_b$ ,  $10 \cdot \phi$  e 100 mm.

Permite-se, em casos especiais, considerar outros fatores redutores do comprimento de ancoragem necessário.

### 5.3.2.3 Armadura transversal na ancoragem

As ancoragens por aderência, com exceção das regiões situadas sobre apoios diretos, devem ser confinadas por armaduras transversais ou pelo próprio concreto; neste último caso, o cobrimento da barra ancorada deve ser maior ou igual a  $3 \cdot \phi$ , e a distância entre as barras ancoradas também deve ser maior ou igual a  $3 \cdot \phi$ .

Segundo o item 9.4.2.6 da norma, consideram-se como armaduras transversais as existentes ao longo do comprimento de ancoragem, caso a soma das áreas dessas armaduras seja maior ou igual às especificadas a seguir:

#### a) Barras com $\phi < 32$ mm

Ao longo do comprimento de ancoragem deve ser prevista armadura transversal capaz de resistir a 25% da força longitudinal de uma das barras ancoradas. Se a ancoragem envolver barras diferentes, prevalece, para esse efeito, a de maior diâmetro.

#### b) Barras com $\phi \geq 32$ mm

Deve ser verificada a armadura em duas direções transversais ao conjunto de barras ancoradas. Essas armaduras transversais devem suportar os esforços de fendilhamento

segundo os planos críticos, respeitando o espaçamento máximo de  $5 \cdot \phi$  (onde  $\phi$  é o diâmetro da barra ancorada).

c) Barras comprimidas

Quando se tratar de barras comprimidas, pelo menos uma das barras constituintes da armadura transversal deve estar situada a uma distância igual a quatro diâmetros (diâmetro da barra ancorada) além da extremidade da barra.

5.3.2.4 Ancoragem de estribos

De acordo com o item 9.4.6 da norma, a ancoragem dos estribos deve necessariamente ser garantida por meio de ganchos ou barras longitudinais soldadas. Os ganchos dos estribos estão apresentados na seção 5.3.3.2.

5.3.3 GANCHOS DE ANCORAGEM NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS

Na norma, são previstos ganchos para ancoragem das barras tracionadas e estribos; os ganchos possibilitam a redução do comprimento de ancoragem. Como já visto, as armaduras comprimidas devem ser ancoradas sem ganchos.

5.3.3.1 Ganchos da armadura de tração

As recomendações para os ganchos da armadura longitudinal de tração se encontram no item 9.4.2.3 da ABNT NBR 6118:2014. Os comprimentos mínimos retos nas extremidades das barras visam garantir o trabalho do gancho ou a efetiva ancoragem. Os ganchos podem ser (Figura 5.8):

- a) semicirculares, com ponta reta de comprimento não inferior a  $2 \cdot \phi$ ;
- b) em ângulo de  $45^\circ$  (interno), com ponta reta de comprimento não inferior a  $4 \cdot \phi$ ;
- c) em ângulo reto, com ponta reta de comprimento não inferior a  $8 \cdot \phi$ .

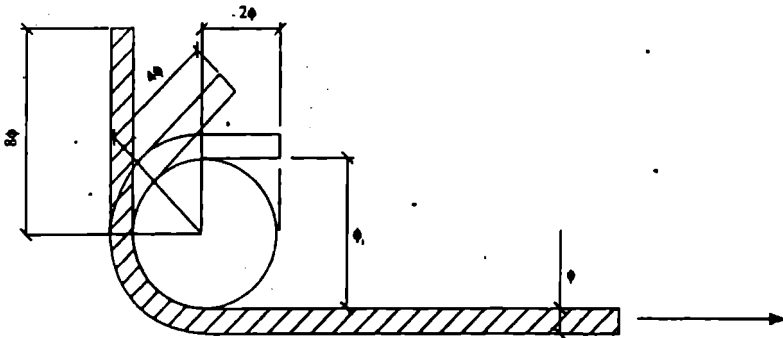


Figura 5.8 Geometria dos ganchos de barras tracionadas, em ângulo reto, quarenta e cinco graus interno e semicircular.

Nas barras lisas, os ganchos deverão ser semicirculares. O diâmetro interno da curvatura do dobramento dos ganchos das armaduras longitudinais de tração ( $\phi$ , na Figura 5.8), exigido a fim de evitar fissuras no aço, deve ser, pelo menos, igual aos valores do Quadro 5.1, dados em função do diâmetro da barra e do tipo de aço.

Quadro 5.1 Diâmetro dos pinos de dobramento (D) dos ganchos (valores de  $\phi$ ).

Bitola da barra	CA25	CA50	CA60
$\phi < 20$ mm	$4 \cdot \phi$	$5 \cdot \phi$	$6 \cdot \phi$
$\phi \geq 20$ mm	$5 \cdot \phi$	$8 \cdot \phi$	-

### Exemplo 2

Calcular o comprimento de ancoragem de uma barra de diâmetro de 12,5 mm, considerando região de boa aderência, concreto com  $f_{ck} = 20$  MPa e terminando na extremidade com gancho de ângulo reto. Detalhar o gancho.

#### a) Cálculo do comprimento de ancoragem

O comprimento de ancoragem de uma barra tracionada, com área efetiva igual à calculada, quando se utiliza gancho, é obtido multiplicando o comprimento de ancoragem da barra reta (comprimento básico) por 0,7, ou seja,  $\ell_{b, \text{gancho}} = 0,7 \cdot \ell_{b, \text{reta}}$ . Assim, a partir do resultado do comprimento de ancoragem obtido no exemplo 1, resulta:

$$\ell_{b, \text{gancho}} = 0,7 \cdot 54,65 = 38,26 \text{ cm}$$

#### b) Detalhamento do gancho

Deve ser calculado o comprimento gasto para executar o gancho, que é igual à soma do trecho curvo retificado (do ponto A ao B) com a ponta reta, no caso igual a  $8 \cdot \phi$ , conforme a Figura 5.9, resultando:

$$\ell_g = \frac{\pi \cdot (5 \cdot \phi + \phi)}{4} + 8 \cdot \phi = 4,7 \cdot \phi + 8 \cdot \phi = 12,7 \cdot \phi = 12,7 \cdot 1,25 \cong 16 \text{ cm};$$

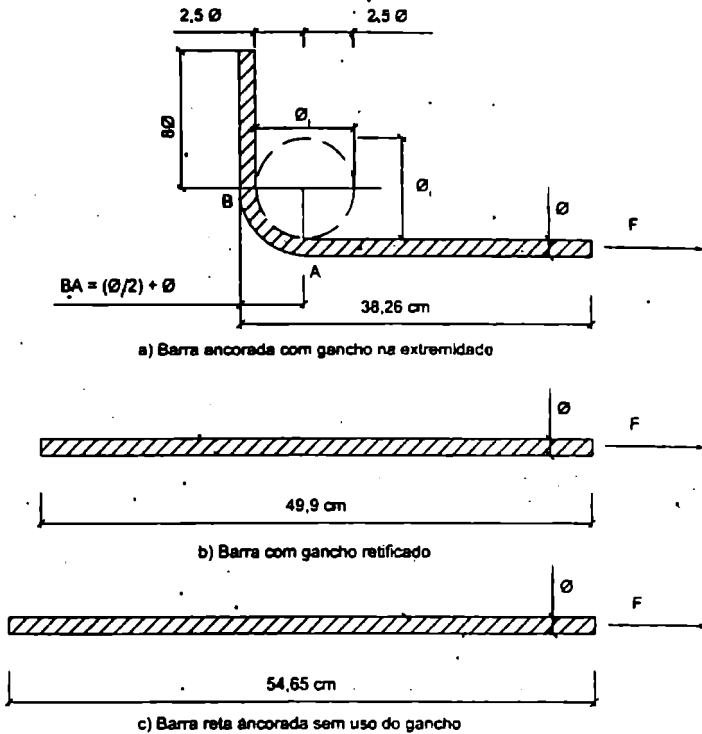


Figura 5.9 Geometria para cálculo do comprimento dos ganchos a 90° e comprimentos da ancoragem com gancho e sem gancho.

Embora na ABNT NBR 6118:2014 não esteja definido onde termina o comprimento de ancoragem em barras com ganchos, na versão de 1982 estava estabelecido que  $\ell_b$  deveria se estender até o ponto B, como indicado na Figura 5.9. Assim, o comprimento de aço gasto a mais para se ancorar com gancho é obtido retirando-se da medida anterior a projeção horizontal do comprimento AB e acrescentando-se o tamanho do gancho:

- Valor a descontar de  $\ell_b$  (início da curva):

$$\frac{\phi}{2} + \phi = \frac{5 \cdot \phi}{2} + \phi = 3,5 \cdot \phi = 3,5 \cdot 1,25 \cong 4,4 \text{ cm};$$

- Tamanho total da ancoragem com gancho:  $\ell_1 = \ell_b + \ell_g - 4,4 = 38,26 + 16 - 4,4 \cong 49,9 \text{ cm}$ .

Observa-se que não compensa utilizar gancho reto na ancoragem, pois o comprimento total gasto para as barras com e sem gancho é praticamente o mesmo (49,9 cm

para 54,6 cm), conforme se observa na Figura 5.9; a pequena economia conseguida no comprimento total não compensa, pois há um maior trabalho para executar o gancho, não havendo economia. Portanto, os ganchos devem ser colocados apenas quando não houver distância disponível para ancorar a armadura, como ocorre, por exemplo, nos apoios extremos de vigas.

### Exemplo 3

Detalhar uma barra de aço CA50 de modo que ela se estenda sobre todo o comprimento de uma viga, na sua parte inferior, utilizando ganchos semicirculares ( $180^\circ$ ) nas duas extremidades; a distância entre as faces externas da viga é 800 cm, e o cobrimento é de 3 cm.

A Figura 5.10 traz o esquema da representação da barra.

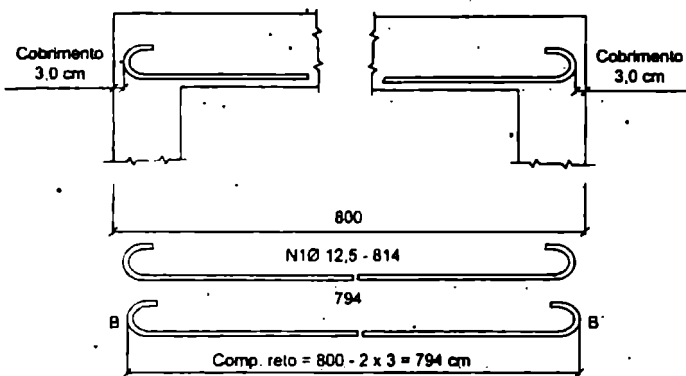


Figura 5.10 Barra com duas extremidades em gancho semicircular: notação empregada em desenhos de armação.

É necessário identificar a barra e informar suas dimensões para que ela possa ser confeccionada, e cada barra será designada por uma denominação genérica dada por:

$Nn \phi D - C$

em que  $n$  é o número que identifica a barra,  $D$  é o diâmetro da barra em milímetros e  $C$  o comprimento total em centímetros. No caso, a designação da barra fica: N1  $\phi$  12,5 - 818.

Além do valor do comprimento total da barra (refinada), costuma-se indicar o comprimento "reto" da barra, na verdade a distância  $BB'$ , que no caso vale  $l = 800 - 2 \cdot 3 = 794$  cm.

Para obter o valor do comprimento total é preciso acrescentar aquele necessário para construir o gancho. Este valor é dado pelo comprimento total do gancho (semicírculo mais ponta reta de  $2 \cdot \phi$ ), subtraído da sua projeção horizontal:

- Comprimento do gancho:

$$\ell_g = \frac{\pi \cdot (5 \cdot \phi + \phi)}{2} + 2 \cdot \phi = 9,4 \cdot \phi + 2 \cdot \phi = 11,4 \cdot \phi = 11,4 \cdot 1,25 \cong 14 \text{ cm};$$

- Valor a descontar de  $\ell_g$  (início da curva):

$$\frac{\phi_i}{2} + \phi = \frac{5 \cdot \phi}{2} + \phi = 3,5 \cdot \phi = 3,5 \cdot 1,25 \cong 4,4 \text{ cm};$$

- Acréscimo no tamanho da barra para um gancho:  $14,0 - 4,4 = 9,6 \cong 10,0 \text{ cm};$
- O comprimento total da barra é igual ao reto mais dois ganchos:  $\ell_t = 794 + 2 \cdot 10 = 814 \text{ cm}.$

Para confeccionar a barra, o fabricante precisa conhecer os detalhes do gancho. Assim, recomenda-se que seja colocado na planta de armação um detalhe genérico dos ganchos empregados como, por exemplo, a Figura 5.9.

### 5.3.3.2 Ganchos dos estribos

De acordo com o item 9.4.6.1, os ganchos dos estribos, confeccionados com barras de diâmetro  $\phi_t$ , poderão ser:

- semicirculares ou em ângulo de  $45^\circ$  (interno), com ponta reta de comprimento igual a  $5 \cdot \phi_t$ , porém não inferior a 5 cm;
- em ângulo reto, com ponta reta de comprimento maior ou igual a  $10 \cdot \phi_t$ , porém não inferior a 7 cm (este caso não é permitido para barras e fios lisos).

Os diâmetros internos da curvatura dos estribos deverão ser, no mínimo, iguais aos do Quadro 5.2 (Tabela 9.2 da ABNT NBR 6118:2014), sendo  $\phi_t$  o diâmetro da barra do estribo:

Quadro 5.2 Diâmetro dos pinos de dobramento para estribos.

Bitola (mm)	CA25	CA50	CA60
$\leq 10$	$3 \cdot \phi_t$	$3 \cdot \phi_t$	$3 \cdot \phi_t$
$10 < \phi < 20$	$4 \cdot \phi_t$	$5 \cdot \phi_t$	–
$\geq 20$	$5 \cdot \phi_t$	$8 \cdot \phi_t$	–

## 5.4 EMENDAS DE BARRAS

Freqüentemente, é preciso emendar uma barra de aço, seja pela necessidade de um comprimento maior que 12 m (tamanho máximo das barras comerciais), seja por outro motivo qualquer. Nesse caso, devem ser respeitadas as prescrições relacionadas no item 9.5 da ABNT NBR 6118:2014. Aqui serão apresentadas apenas as prescrições referentes às emendas de barras tracionadas e comprimidas por traspasse, que é a mais usual.

As emendas das barras podem ser dos seguintes tipos: por traspasse; por luvas com preenchimento metálico, rosqueadas ou prensadas; por solda; e por outros dispositivos, devidamente justificados.

Há limitações à utilização das emendas por traspasse: não são permitidas para barras de bitola superior a 32 mm, nem em tirantes e pendurais (elementos somente tracionados). Recomenda-se ainda que, em barras tracionadas, as emendas contenham ganchos quando elas forem lisas, e que sejam evitadas em regiões de altos momentos.

### 5.4.1 PROPORÇÃO DAS BARRAS EMENDADAS

Se for necessário emendar diversas barras, há uma limitação do número de emendas em uma mesma seção. De acordo com o item 9.5.2.1 da norma, consideram-se como na mesma seção transversal as emendas que se superpõem ou cujas extremidades mais próximas estejam afastadas de menos de 20% do comprimento do trecho de traspasse (Figura 5.11). Quando as barras têm diâmetros diferentes, o comprimento de traspasse deve ser calculado pela barra de maior diâmetro.

A proporção máxima de barras tracionadas da armadura principal, emendadas por traspasse na mesma seção transversal do elemento estrutural, deve ser a indicada no Quadro 5.3 (Tabela.9.3 da ABNT NBR 6118:2014). A adoção de proporções maiores que as indicadas deve ser justificada quanto à integridade do concreto na transmissão dos esforços e da capacidade resistente da emenda, como um conjunto, diante da natureza das ações que a solicitem.

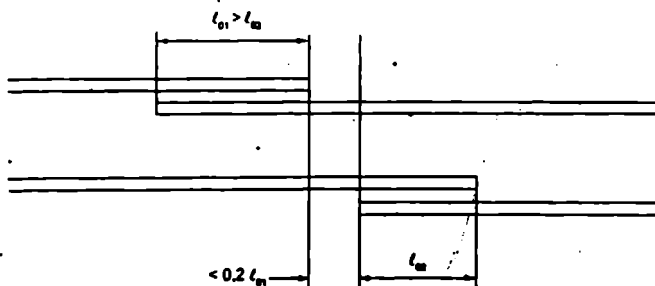


Figura 5.11 Emendas supostas como na mesma seção transversal (Figura 9.3 da ABNT NBR 6118:2014).

**Quadro 5.3** Proporção máxima de barras tracionadas emendadas na mesma seção.

Tipo de barra	Situação	Carregamento estático	Carregamento dinâmico
Alta aderência	Em uma camada	100%	100%
	Em mais de uma camada	50%	50%
Lisa	$\phi < 16$ mm	50%	25%
	$\phi \geq 16$ mm	25%	25%

Quando se tratar de armadura permanentemente comprimida ou de distribuição, todas as barras podem ser emendadas na mesma seção.

#### 5.4.2 COMPRIMENTO DE TRASPASSE DE BARRAS ISOLADAS

a) Barras tracionadas (item 9.5.2.2 da ABNT NBR 6118:2014)

- Quando a distância livre entre barras emendadas estiver compreendida entre 0 e  $4 \cdot \phi$ , o comprimento do trecho de traspasse deve ser:

$$\ell_{0t} = \alpha_{0t} \cdot \ell_{b,nec} \geq \ell_{0t,min} \quad (5.6)$$

em que  $\ell_{0t,min}$  é o maior valor entre  $0,3 \cdot \alpha_{0t} \cdot \ell_b$  ( $\ell_b$  dado pela equação 5.4),  $15 \cdot \phi$  e 200 mm,  $\alpha_{0t}$  é o coeficiente função da porcentagem de barras emendadas na mesma seção, conforme Quadro 5.4 (Tabela 9.4 da norma), e  $\ell_{b,nec}$  é dado pela equação 5.5.

**Quadro 5.4** Valores do coeficiente  $\alpha_{0t}$ .

Barras emendadas na mesma seção (%)	$\leq 20$	25	33	50	$> 50$
Valores de $\alpha_{0t}$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0

- Quando a distância livre entre barras emendadas for maior que  $4 \cdot \phi$ , ao comprimento calculado no item anterior deve ser acrescida a distância livre entre barras emendadas. A armadura transversal na emenda deve ser justificada considerando o comportamento conjunto concreto-aço, atendendo ao estabelecido no item 9.5.2.4 da norma, que trata de armadura transversal nas emendas por traspasse (seção 5.4.3).

b) Barras comprimidas (item 9.5.2.3 da ABNT NBR 6118:2014)

Quando as barras estiverem comprimidas, adota-se a seguinte expressão para cálculo do comprimento de traspasse:

$$\ell_{Dc} = \ell_{b,nec} \geq \ell_{Dc,min} \quad (5.7)$$

em que  $\ell_{Dc,min}$  é o maior valor entre  $0,6 \cdot \ell_b$  (equação 5.4),  $15 \cdot \phi$  e 200 mm, e  $\ell_{b,nec}$  é dado pela equação 5.5.

### 5.4.3 ARMADURA TRANSVERSAL NAS EMENDAS POR TRASPASSE EM BARRAS ISOLADAS

a) Barras tracionadas da armadura principal (Figura 5.12)

Quando  $\phi < 16$  mm ou a proporção de barras emendadas na mesma seção for menor que 25%, a armadura transversal deve satisfazer às condições dadas na seção 5.3.2.3 sobre barras transversais na ancoragem (item 9.4.2.6 da ABNT NBR 6118:2014).

Nos casos em que  $\phi \geq 16$  mm ou quando a proporção de barras emendadas na mesma seção for maior ou igual a 25%, a armadura transversal deve:

- ser capaz de resistir a uma força igual à de uma barra emendada, considerando os ramos paralelos ao plano da emenda;
- ser constituída por barras fechadas se a distância entre as duas barras mais próximas de duas emendas na mesma seção for menor que  $10 \cdot \phi$  ( $\phi$  = diâmetro da barra emendada);
- se concentrar nos terços extremos da emenda.

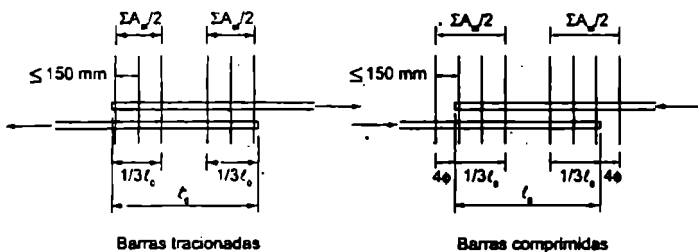


Figura 5.12 Armadura transversal nas emendas (Figura 9.4 da ABNT NBR 6118:2014).

b) Barras comprimidas (Figura 5.12)

Devem ser mantidos os critérios estabelecidos para o caso anterior, com pelo menos uma barra de armadura transversal posicionada  $4 \cdot \phi$  além das extremidades da emenda.

c) Emendas de barras de armaduras secundárias

Nas emendas de barras de armaduras secundárias, a armadura transversal deve obedecer ao estabelecido na seção 5.3.2.3 (item 9.4.2.6 da ABNT NBR 6118:2014).

Nas emendas de peças de concreto, como estaca-bloco, bloco-pilar, vigas de sustentação-escada, pilar inferior-pilar superior etc., é necessário o emprego de emendas por traspasse, a fim de permitir a transmissão dos esforços de um elemento para outro.

Na Figura 5.13 indicam-se esquematicamente os casos citados, com os elementos a ser construídos desenhados em linha tracejada.

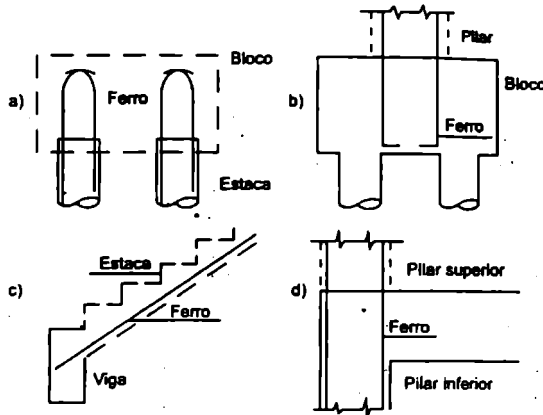


Figura 5.13 Utilização de barras de "espera" na ligação de peças estruturais de concreto.

## 5.5 DESLOCAMENTO DO DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES (DECALAGEM)

Como visto, os comprimentos das barras da armadura longitudinal em uma viga são determinados por meio das medidas efetuadas no diagrama de momentos fletores (os valores  $a$ , das figuras 5.2 e 5.3), às quais devem ser somados o comprimento de ancoragem da cada uma. É preciso lembrar, agora, que o estudo feito considerou apenas o caso de flexão simples e pura. Em uma viga de edifícios há sempre o efeito do cisalhamento, devido à força cortante, e para levá-lo em conta é utilizado o modelo de treliça de Morsch, desenvolvido no início do século XX. Neste capítulo, faz-se apenas uma introdução do modelo, que será discutido mais detalhadamente no capítulo seguinte, que trata do cálculo da armadura de cisalhamento em vigas.

Na análise do efeito da força cortante em vigas, parte-se de um modelo, que servirá de base para o cálculo, que represente a viga fissurada próxima da situação de colapso. Seja a viga da Figura 5.14a, que, segundo Morsch, pode ser representada por uma treliça, em que se supõe que o carregamento atuante corresponda ao estado limite de ruptura, no caso, por cisalhamento.

No colapso, as fissuras na região próxima ao apoio estão inclinadas em aproximadamente  $45^\circ$  (ver capítulo 6). Analisando esta região, pois o que interessa é o efeito do cisalhamento, e no apoio as forças cortantes são maiores, pode-se considerar que o concreto íntegro entre duas fissuras inclinadas (biela comprimida de concreto) seja representado pelas diagonais da treliça, com inclinação de  $45^\circ$ ; a região de concreto comprimida na parte superior da viga (acima da linha neutra) é representada pelo banzo

superior horizontal; a armadura longitudinal tracionada é representada pelo-banzo inferior, e os montantes (verticais) representam o efeito dos estribos (Figura 5.14b).

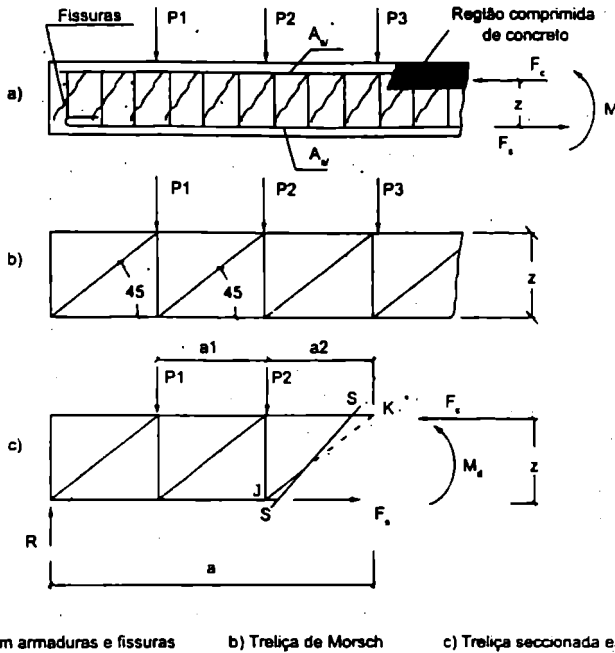


Figura 5.14 Modelo de treliça de Morsch em uma viga simplesmente apoiada.

Sectionando a treliça de Morsch em uma seção SS (Figura 5.14c), e fazendo o equilíbrio de momentos em torno do ponto K, chega-se a:

$$F_s \cdot z = R \cdot a - P_1 \cdot (a_1 + a_2) - P_2 \cdot a_2$$

Verifica-se que a parcela da direita ( $R \cdot a - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2$ ) é numericamente igual ao valor do momento fletor de cálculo ( $M_d$ ), pois a situação é próxima ao colapso, atuando na seção que contém o ponto K. Assim, como a força na armadura é a área de aço  $A_s$  multiplicada pela sua resistência de cálculo à tração ( $f_{yd}$ ), resulta:

$$F_s \cdot z = M_d \Rightarrow (f_{yd} \cdot A_s) \cdot z = M_d \Rightarrow A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_{yd}}$$

que é a mesma expressão obtida quando se calculou a armadura de flexão (equação 3.24, capítulo 3). A diferença é que, naquela situação,  $M_d$  atuava na seção que continha o ponto J (onde atua  $F_s$ ), que está defasada da seção que contém o ponto K da distância  $a_2$ ; como  $M_d$  atuante na seção do ponto J é menor que  $M_d$  na seção do ponto K, a área

da armadura obtida é menor que a necessária. Em outras palavras, isso significa que a área  $A_s$  da armadura (no capítulo 3) foi calculada com  $F_i$  que atua em J, quando deveria ter sido calculada com  $F_i$  atuante na seção que contém o ponto K, em que é maior.

Uma maneira de considerar esse fato é trasladar o diagrama de momentos fletores de certa distância  $a_i$ , na direção mais desfavorável, como indicado pelas curvas tracejadas na Figura 5.15. Dessa maneira, os comprimentos  $a_i$  das barras seriam tirados deste novo diagrama. Para simplificar, pode-se usar o diagrama normal e acrescentar aos valores de  $a_i$ , além do comprimento de ancoragem  $l_b$ , o valor de  $a_i$ .

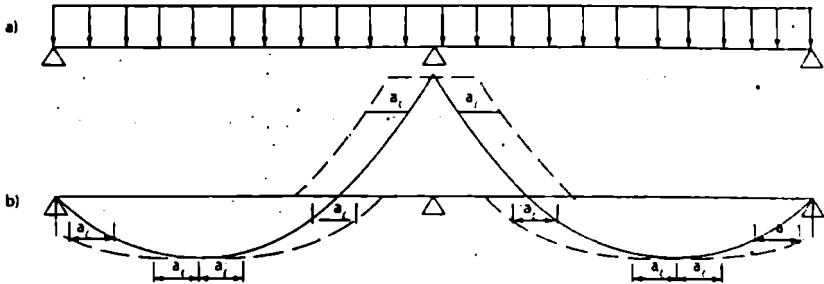


Figura 5.15. Viga contínua com carga distribuída e diagrama de momento deslocado.

Percebe-se que o cálculo da armadura transversal é básico para estabelecer o valor do deslocamento do diagrama de momentos fletores. Segundo a ABNT NBR 6118:2014, item 17.4.1, o cálculo da armadura transversal é baseado no modelo de treliça de banzos paralelos, com uma parcela ( $V_c$ ) da força cortante absorvida por mecanismos resistentes complementares. São possíveis dois modelos de cálculo, que serão vistos em detalhes no capítulo 6:

**Modelo I:** admite que as diagonais de compressão (bielas comprimidas) têm inclinação  $\theta = 45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal da peça, e que  $V_c$  tem valor constante, independentemente de  $V_{sd}$  (força cortante sollicitante de cálculo);

**Modelo II:** admite que as diagonais de compressão têm inclinação  $\theta$  diferente de  $45^\circ$ , arbitrada livremente no intervalo  $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ ; nesse caso, a parcela  $V_c$  é considerada com valores menores, sofrendo redução com o aumento  $V_{sd}$ .

### 5.5.1 DESLOCAMENTO (DECALAGEM) DO DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES DE ACORDO COM O MODELO I

Quando a armadura longitudinal de tração for determinada por meio do equilíbrio de esforços na seção normal ao eixo do elemento estrutural, podem-se substituir os efeitos provocados pela fissuração oblíqua pelo deslocamento do diagrama de força

no banzo tracionado (ou do diagrama de momentos fletores), paralelo ao eixo da peça, dado por (item 17.4.2.2c da norma):

$$a_t = d \cdot \left[ \frac{V_{Sd,max}}{2 \cdot (V_{Sd,max} - V_c)} \cdot (1 + \cot \alpha) - \cot \alpha \right] \leq d \quad (5.8)$$

em que:

$a_t = d$  para  $|V_{Sd,max}| \leq |V_c|$ ;

$a_t \geq 0,5 \cdot d$ , no caso geral;

$a_t \geq 0,2 \cdot d$ , para estribos inclinados a  $45^\circ$ ;

$\alpha$  – ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal da peça, podendo-se tomar  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ;

$V_{Sd,max}$  – força cortante de cálculo na seção mais solicitada;

$V_c$  – parcela da força cortante absorvida por mecanismos adicionais ao de treliça.

A parcela  $V_c$  da força cortante, no caso de flexão simples, sendo  $b_w$  e  $d$  a largura e a altura útil da seção, e  $f_{ctd}$  a resistência de cálculo à tração do concreto, é dada por:

$$V_c = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \quad (5.9)$$

em que  $f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot f_{ct,m}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot 0,3 \cdot f_{ct}^{2/3}}{1,4} = 0,15 \cdot f_{ct}^{2/3}$ , com  $f_{ct}$  em MPa.

No caso da utilização de estribos verticais e, portanto,  $\alpha = 0$ , resulta para  $a_t$ :

$$a_t = d \cdot \left[ \frac{V_{Sd,max}}{2 \cdot (V_{Sd,max} - V_c)} \right] \leq d \quad (5.10)$$

Ainda neste mesmo item (17.4.2.2c), a norma admite que a decalagem do diagrama de força no banzo tracionado pode também ser obtida simplesmente empregando a força de tração, em cada seção, dada pela expressão 5.11:

$$F_{Sd,cor} = \left[ \frac{M_{Sd}}{z} + |V_{Sd}| \cdot (\cot \theta - \cot \alpha) \cdot \frac{1}{2} \right] \leq \frac{M_{Sd,max}}{z} \quad (5.11)$$

em que:

$M_{Sd,max}$  é o momento fletor de cálculo máximo no trecho em análise;

$\alpha$  é o ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal da peça;

$\theta = 45^\circ$  é a inclinação das diagonais de compressão em relação ao eixo longitudinal da peça.

### 5.5.2 DESLOCAMENTO (DECALAGEM) DO DIAGRAMA DE MOMENTOS FLETORES DE ACORDO COM O MODELO II

O deslocamento do diagrama de momentos fletores, de acordo com o modelo II, mantidas as mesmas condições estabelecidas para o modelo I, será (item 17.4.2.3c da norma):

$$a_f = 0,5 \cdot d \cdot (\cot \theta - \cot \alpha) \geq \begin{cases} 0,5 \cdot d \text{ (caso geral)} \\ 0,2 \cdot d \text{ (estribos inclinados a } 45^\circ) \end{cases} \quad (5.12)$$

em que  $\theta$  é a inclinação das diagonais de compressão (bielas), variando entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$ .

Considerando novamente estribos verticais, resulta para  $a_f$ :

$$a_f = 0,5 \cdot d \cdot \cot \theta \geq 0,5 \cdot d \quad (5.13)$$

Também no modelo II permanece válida a alternativa para a obtenção da força de tração dada pela expressão 5.11.

## 5.6 ÂNCORAGEM DA ARMADURA DE TRAÇÃO JUNTO AOS APOIOS

Quando o diagrama de momentos deslocado, em seu ramo positivo, atingir o apoio, torna-se necessário ancorar a biela de concreto na região inferior da viga. Na parte superior, o concreto comprimido é responsável pela ancoragem. As recomendações a respeito de armadura de tração nas seções de apoio e sua ancoragem são apresentadas nos itens 18.3.2.4 e 18.3.2.4.1 da ABNT NBR 6118:2014. Os esforços de tração, junto aos apoios de vigas simples ou contínuas, devem ser resistidos por armaduras longitudinais que satisfaçam a mais severa das seguintes condições:

- Para momentos positivos, as armaduras obtidas por meio do dimensionamento da seção;
- Em apoios extremos, para garantir a ancoragem da diagonal de compressão, armaduras capazes de resistir a uma força de tração dada por:

$$R_{st} = \frac{a_f}{d} \cdot V_d + N_d \quad (5.14)$$

em que  $V_d$  é a força cortante no apoio,  $N_d$  é uma força de tração eventualmente existente e  $a_f$  é o valor do deslocamento do diagrama de momentos fletores.

c) Em apoios extremos e intermediários, por prolongamento de uma parte da armadura de tração do vão ( $A_{s,vão}$ ), correspondente ao máximo momento positivo do tramo ( $M_{vão}$ ), de modo que:

- $A_{s,apoiio} \geq \frac{A_{s,vão}}{3}$  se  $M_{apoiio}$  for nulo ou negativo e de valor absoluto  $\leq 0,5 \cdot M_{vão}$ ;
- $A_{s,apoiio} \geq \frac{A_{s,vão}}{4}$  se  $M_{apoiio}$  for negativo e de valor absoluto  $> 0,5 \cdot M_{vão}$ .

Na ancoragem da armadura de tração no apoio, quando se tratar de apoio extremo com momento positivo (caso *a*), deverão ser obedecidos os critérios usuais de detalhamento, já discutidos. Para as situações de apoios extremos com momentos negativos ou nulos (casos *b* e *c*), as barras dessas armaduras deverão ser ancoradas a partir da face do apoio, com comprimentos iguais ou superiores ao maior dos seguintes valores:

- $\ell_{b,anc}$ , conforme a equação 5.5;
- $(r + 5,5 \cdot \phi)$ , em que  $r$  é o raio de curvatura interno do gancho e  $\phi$  o diâmetro da barra;
- 60 mm.

Quando houver cobrimento da barra no trecho do gancho, medição normalmente ao plano do gancho, de pelo menos 70 mm, e as ações acidentais não ocorrerem com grande frequência com seu valor máximo, o primeiro dos três valores anteriores pode ser desconsiderado, prevalecendo as duas condições restantes.

Quando se tratar de apoios intermediários, nas situações *b* e *c*, o comprimento de ancoragem pode ser igual a  $10 \cdot \phi$ , desde que não haja nenhuma possibilidade da ocorrência de momentos positivos nessa região provocados por situações imprevistas, particularmente por efeitos de vento e eventuais recalques. Quando essa possibilidade existir, as barras deverão ser contínuas ou emendadas sobre o apoio.

## 5.7 ENGASTAMENTO VIGA-PILAR

Uma vez garantida a ancoragem da biela junto aos apoios, deve-se levar em conta, principalmente nos apoios extremos, a solidariedade dos pilares com a viga (rigidez da ligação, que permite a transmissão parcial de momentos). De maneira aproximada, segundo o item 14.6.6.1 da ABNT NBR 6118:2014, para considerar a influência dos pilares nas vigas deve ser admitido, nos apoios extremos, momento fletor ( $M_{ent,viga}$ ) dado por:

$$M_{ent,viga} = \frac{\Gamma_{inf} + \Gamma_{sup}}{\Gamma_{inf} + \Gamma_{sup} + \Gamma_{viga}} \cdot M_{eng} \quad (5.15)$$

em que:

$r_{inf}, r_{sup}, r_{viga}$  é a rigidez de cada elemento  $i$  no nó em foco (pilar inferior, superior e viga);

$r_i = \frac{I_i}{\ell_i}$ , sendo  $I_i$  a inércia do elemento e  $\ell_i$  conforme a Figura 5.16;

$M_{eng}$  é o momento de engastamento perfeito na ligação viga-pilar.

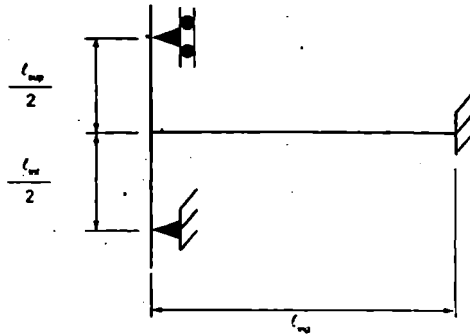
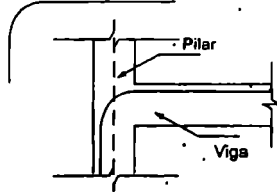


Figura 5.16 Aproximação dos valores de  $\ell_i$  em apoios extremos (Figura 14.8 da ABNT NBR 6118:2014).

O momento existente na ligação viga-pilar de extremidade deve ser resistido por uma armadura, como, por exemplo, a indicada na Figura 5.17.

Vista lateral - ligação viga-pilar de extremidade

Armadura para resistir ao esforço na ligação viga-pilar



Esquema estrutural

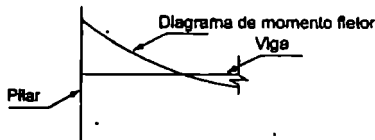


Figura 5.17 Armadura para resistir ao momento negativo nas ligações viga-pilar de extremidade.

## 5.8 FUROS E ABERTURAS EM VIGAS

A ABNT NBR 6118:2014 (item 21.3) permite a existência de furos, aberturas e canalizações embutidas em peças estruturais de concreto armado, desde que sejam verificados os seus efeitos na resistência e na deformação, e que não ultrapassem os limites exigidos, dados no item 13.2.5. No caso de aberturas em vigas, pilares-parede, vigas-parede e lajes, elas devem ser calculadas e detalhadas levando em conta as perturbações das tensões que se concentram em torno das mesmas.

Toda abertura em estruturas de concreto deve ser analisada de tal forma que a armadura calculada equilibre os esforços de tração que se desenvolvem nessas regiões. Devem ser previstas, também, armaduras complementares dispostas no contorno e nos cantos das aberturas.

Os limites para as dimensões de furos e aberturas constam na seção 13 da norma, e serão vistos na sequência. Caso esses limites não sejam atendidos, a verificação estrutural pode ser feita pelo Método de Bielas e Tirantes, conforme a seção 22 da mesma norma.

### 5.8.1 FUROS QUE ATRAVESSAM AS VIGAS NA DIREÇÃO DE SUA LARGURA

Nas situações em que os furos atravessam as vigas na direção de sua largura, conforme o item 13.2.5.1 da norma, a distância de um furo à face mais próxima da viga deve ser, no mínimo, igual a 5 cm e duas vezes o cobrimento previsto para essa face. A seção remanescente nessa região, descontada a área ocupada pelo furo, deve ser capaz de resistir aos esforços previstos no cálculo, além de permitir uma boa concretagem. As verificações de resistência e deformação podem ser dispensadas quando ocorrerem, simultaneamente, as seguintes situações, sendo  $h$  a altura da viga:

- Abertura em zona de tração e a uma distância da face do apoio de, no mínimo,  $2 \cdot h$ ;
- Dimensão da abertura de, no máximo, 12 cm e  $h/3$ ;
- Distância entre faces de aberturas, num mesmo tramo, de, no mínimo,  $2 \cdot h$ ;
- Cobrimentos suficientes e não seccionamento das armaduras.

### 5.8.2 FUROS QUE ATRAVESSAM AS VIGAS NA DIREÇÃO DA ALTURA

Nas situações em que os furos atravessam as vigas na direção da altura, a ABNT NBR 6118:2014, item 21.3.3, prescreve:

- As aberturas, como furos para passagem de tubulação vertical nas edificações (Figura 5.18) não devem ter diâmetros superiores a  $1/3$  da largura dessas vigas nas regiões desses furos;
- Deve ser verificada a redução da capacidade portante ao cisalhamento e à flexão na região da abertura;
- A distância de um furo à face mais próxima da viga deve ser, no mínimo, igual a 5 cm e duas vezes o cobrimento previsto nessa face; a largura remanescente

nessa região deverá ser capaz de resistir aos esforços previstos no cálculo, além de permitir uma boa concretagem;

- No caso de ser necessário um conjunto de furos, eles devem estar alinhados, e a distância entre suas faces deve ser de, no mínimo, 5 cm ou o diâmetro do furo, e cada intervalo deve conter pelo menos um estribo;
- No caso de peças submetidas à torção, esses limites devem ser ajustados de forma a permitir um funcionamento adequado.

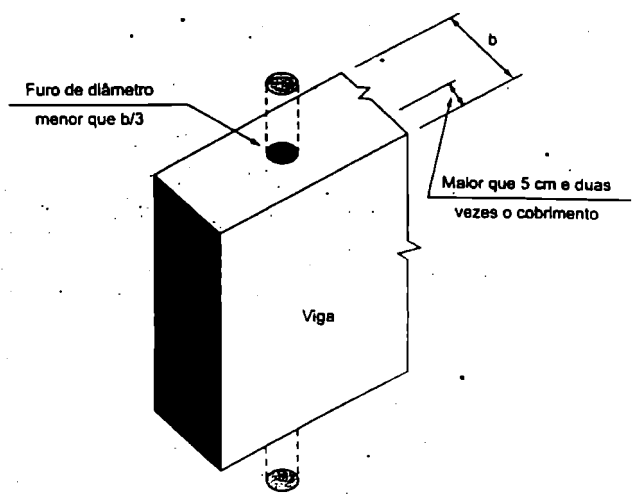


Figura 5.18 Abertura vertical em vigas (Figura 21.5 da ABNT NBR 6118:2014).

### 5.8.3 CANALIZAÇÕES EMBUTIDAS

Canalizações embutidas são as que produzem aberturas segundo o eixo longitudinal de elementos lineares e são contidas em elementos de superfície ou imersas no interior de elementos de volume. Não são permitidas nos seguintes casos (item 13.2.6 da ABNT NBR 6118:2014):

- a) Canalizações sem isolamento adequado ou verificação especial quando destinadas à passagem de fluidos com temperatura que se afaste de mais de 15 °C da temperatura ambiente;
- b) Canalizações destinadas a suportar pressões internas de mais de 0,3 MPa.
- c) Canalizações embutidas em pilares de concreto, quer imersas no material ou em espaços vazios internos ao elemento estrutural, sem a existência de aberturas para drenagem.

#### EXEMPLO 4 (ROTEIRO PARA DETALHAMENTO)

Detalhar a armadura longitudinal da viga V101, da estrutura indicada na planta de fôrmas da Figura 5.19, e esquematizada na Figura 5.20 (o vão da viga V101 foi tomado de eixo a eixo das vigas extremas), cujas seções transversais mais solicitadas (momentos positivo e negativo) foram detalhadas no exemplo 1 do capítulo 4.

Dados (alguns determinados no exemplo 1 do capítulo 4):

- $f_{tk} = 20$  MPa; CA50; cobrimento de 3 cm; pilares com 40 cm x 25 cm;
- altura das vigas:  $h = 0,90$  m e altura útil  $d = 0,80$  m;
- largura das vigas  $b_w = 0,25$  m;
- altura das paredes igual a 3,0 m, resultando para distância entre-eixos das vigas (admitindo múltiplos pavimentos) o valor de 3,90 m;
- carga na viga:  $p = 51,1$  kN/m;
- momento no apoio:  $M_{neg} = 408,8$  kNm;
- armadura negativa (apoio): necessária  $A_s = 20,05$  cm<sup>2</sup>; existente após o detalhamento  $A_s = 20$  cm<sup>2</sup> (16  $\phi$  12,5 mm);
- máximo momento positivo no tramo:  $M_{pos} = 230$  kNm;
- armadura positiva (tramo): necessária  $A_s = 10,18$  cm<sup>2</sup>; existente após o detalhamento  $A_s = 10,0$  cm<sup>2</sup> (8  $\phi$  12,5 mm).

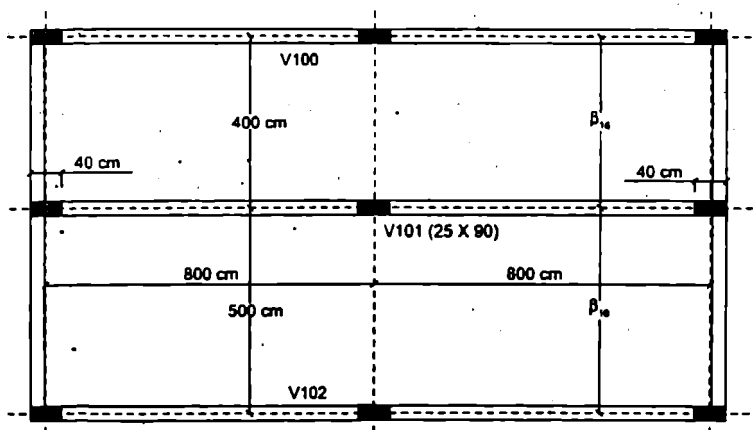


Figura 5.19 Planta de fôrmas da estrutura.

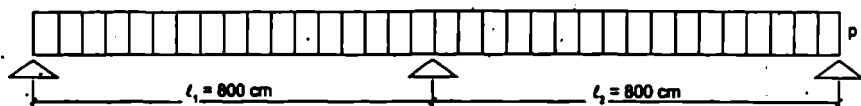


Figura 5.20 Esquema estrutural da viga V101.

O exemplo será resolvido a partir do esquema estrutural da viga V101 (Figura 5.20) e das armaduras de flexão nas seções mais solicitadas que foram obtidas no exemplo do capítulo 4. A seguir, estão indicados sequencialmente todos os procedimentos que devem ser usados para se obter o detalhamento da armadura longitudinal da viga.

a) Determinação (desenho) do diagrama de momentos fletores (no caso para meia viga) O desenho do diagrama de momentos (no caso, uma única parábola, pela existência apenas de carga constante e uniformemente distribuída) deve ser feito em escala para que possam ser obtidos graficamente os comprimentos das barras. Será usado, por exemplo, escala horizontal 1:50 (o comprimento entre apoios será  $800 \text{ cm}/50 = 16 \text{ cm}$ ) e escala vertical  $1 \text{ cm} = 50 \text{ kNm}$ . Para o traçado do diagrama da Figura 5.21 (que aqui, por motivo de espaço, talvez não corresponda à escala adotada), devem ser observadas as seguintes etapas:

- Marcar o valor do momento negativo no apoio  $M = -408,8 \text{ kN m}$  ( $8,176 \text{ cm}$  na escala usada), acima do eixo de referência da viga, obtendo o ponto D;
- Traçar a linha de fecho (ou fechamento), ou seja, um segmento de reta que une os momentos no primeiro apoio (igual a zero) e no segundo ( $-408,8 \text{ kNm}$ ), obtendo o segmento AD; essa linha seria o diagrama de momentos fletores se não houvesse a presença de carga distribuída, ou seja, se o momento fosse resultado de uma carga concentrada atuando no outro vão;
- Marcar o momento que corresponde ao efeito da carga distribuída (parábola); no centro do trecho, a partir da linha de fechamento, marca-se  $p \cdot l^2/8 = 51,1 \cdot 8^2/8 = 408,8 \text{ kN m}$  (para baixo), na escala, o equivalente a  $8,176 \text{ cm}$ ; obtém-se o segmento EF, sendo F um ponto de passagem do diagrama de momentos fletores;
- Marcar o ponto G, encontro das tangentes extremas ou externas ao diagrama de momentos fletores no trecho; basta acrescentar na vertical, a partir de F, o valor  $408,8 \text{ kN.m}$  na escala correspondente ( $8,176 \text{ cm}$ );
- Traçar as tangentes externas, unindo os pontos A a G e D a G;
- Dividir cada segmento das tangentes (AG e DG) em partes iguais (na Figura 5.21, dividiu-se cada trecho em 8 partes iguais);
- Unir por retas cada um dos pontos (assinalados na Figura 5.21 com círculos) em que ficaram divididas às tangentes externas (o primeiro ponto da tangente AG com o último da tangente DG, segundo com penúltimo, e assim sucessivamente); os segmentos obtidos representam tangentes internas ao diagrama de momentos fletores;
- Traçar uma curva que seja tangente aos segmentos obtidos no passo anterior; a curva obtida (parábola) representa o diagrama de momentos fletores no trecho;

- O momento positivo máximo poderá ser obtido em escala, valendo no caso aproximadamente 230 kNm (equivalente a 4,6 cm na escala).

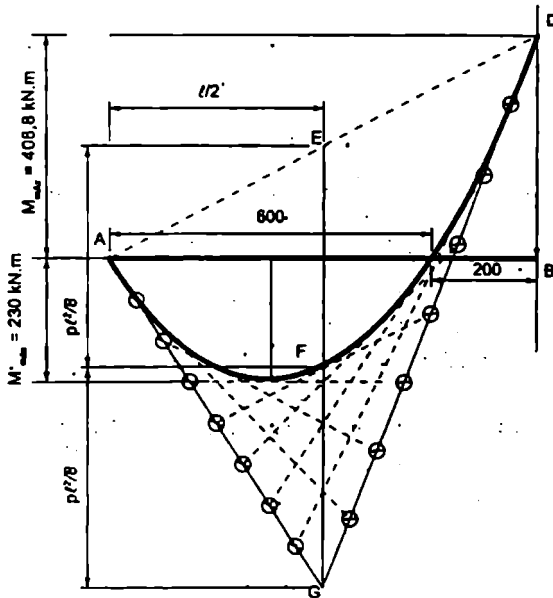


Figura 5.21 Traçado do diagrama de momentos fletores (metade da viga).

b) Determinação dos comprimentos iniciais das barras da armadura longitudinal

As barras da armadura longitudinal, como já dito, terão seus comprimentos iniciais medidos diretamente do diagrama de momentos fletores (Figura 5.22), e a esses valores deverão ser acrescidos os comprimentos de ancoragem e de deslocamento do diagrama; os principais passos a observar são:

- Dividem-se as ordenadas dos momentos máximos (tramo e apoio) em número de partes iguais ao número de barras necessárias (ou metade, um terço etc.); no exercício, as divisões serão feitas pelo número de barras, ou seja, o momento negativo será dividido em dezesseis partes e o positivo em oito;
- Traçam-se retas paralelas ao eixo da viga, pelos pontos em que se dividiram os momentos, até encontrar o diagrama, obtendo os valores dos comprimentos iniciais  $a_i$  de cada barra, de acordo com a escala;
- Optou-se por fazer cada duas barras com o mesmo comprimento a fim de simplificar, principalmente, a execução; dessa maneira, as duas primeiras barras serão chamadas de N1 e terão o comprimento da maior, e assim por diante;

- Serão estendidas, ao longo de toda a viga (apoio extremo a apoio extremo), quatro barras da armadura positiva (N10), conforme definido no item f1); duas servirão como porta-estribos;
- Serão levadas duas barras da armadura negativa até aos apoios extremos, que servirão de porta-estribos (poderia ser adotado um diâmetro menor no trecho de momentos positivos);
- As barras que se prolongam até aos apoios deverão ser emendadas, pois a viga tem comprimento de 16 m, maior que o das barras comerciais (normalmente 12 m); as da armadura negativa serão emendadas na região do tramo, onde são comprimidas, resultando em duas barras que se complementam, denominadas N8 e N9; as da armadura positiva serão emendadas na região do apoio central, onde também são comprimidas, e cada parte terá o mesmo comprimento, tendo portanto a mesma denominação (N10);
- Ao comprimento inicial das barras deverão ser acrescentados, em cada extremidade da mesma, o comprimento de ancoragem ( $\ell_a$ ) e o referente ao deslocamento do diagrama ( $a_r$ );
- As barras N11 da armadura positiva, devido à posição no diagrama e pela necessidade de se acrescentar  $a_r$  e  $\ell_a$ , também chegarão aos apoios extremos, mas não atingirão o apoio intermediário (central);
- Finalmente, é importante ressaltar que a Figura 5.22 se refere à meia viga, e, portanto, os comprimentos das barras da armadura negativa medidos no diagrama deverão ter seus valores dobrados, e as barras da armadura positiva deverão ter suas quantidades dobradas devido à existência do segundo tramo.

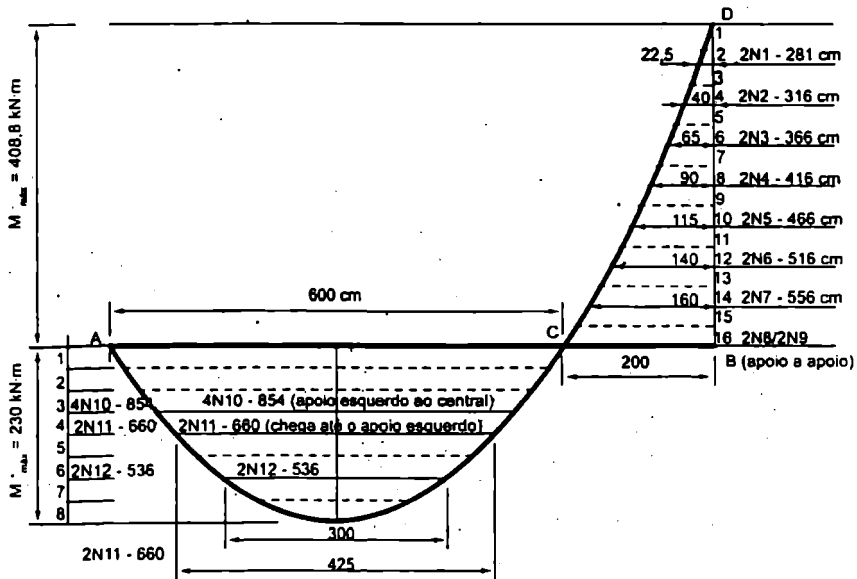


Figura 5.22 Comprimentos iniciais das barras.

c) Determinação do deslocamento do diagrama de momentos fletores: cálculo de  $a$ ,  
 O cálculo do deslocamento  $a$ , será determinado a partir do maior valor da força cortante na viga, que se dará no apoio A ou no apoio B (Figura 5.23).

$$V_A = \frac{51,18}{2} - \frac{408,8}{8} = 153,3 \text{ kN}; \quad V_B = \frac{51,1 \cdot 8}{2} + \frac{408,8}{8} = 255,5 \text{ kN}$$

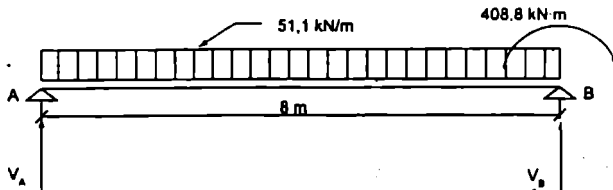


Figura 5.23 Força cortante nos apoios externo e central (meia viga).

- cortante máxima (apoi):  $V_{\max} = 255,5 \text{ kN}$
- $V_c = 0,6 \cdot f_{\text{cfd}} \cdot b_w \cdot d = 0,6 \cdot 1105 \cdot 0,25 \cdot 0,80 = 132,6 \text{ kN}$
- $f_{\text{cfd}} = \frac{0,7 \cdot f_{\text{ctm}}}{1,4} = \frac{0,7 \cdot 0,3 \cdot f_{\text{ck}}^{2/3}}{1,4} = 0,15 \cdot 20^{2/3} \approx 0,15 \cdot 7,37 = 1,105 \text{ MPa} = 1105 \text{ kN/m}^2$

$$\bullet a_t = d \cdot \left[ \frac{V_{ed, \max}}{2 \cdot (V_{ed, \max} - V_c)} \right] = d \cdot \frac{1,4 \cdot 255,5}{2 \cdot (1,4 \cdot 255,5 - 132,6)} = 0,795 \cdot d$$

$$\bullet a_t = 0,795 \cdot d = 0,795 \cdot 0,80 = 0,636 \text{ m} \geq 0,5 \cdot d \Rightarrow a_t = 0,636 \text{ m} \cong 63,5 \text{ cm}$$

d) Comprimento de ancoragem reto básico  $\ell_b$

O comprimento de ancoragem reto básico ( $\ell_b$ ), portanto sem a utilização de gancho, para uma barra de  $\phi$  12,5 mm, aço CA50 e  $f_{ck} = 20$  MPa, considerando situação de boa aderência, foi calculado no exemplo 1, e com gancho foi calculado no exemplo 2, resultando nos seguintes valores:

- Comprimento de ancoragem reto básico:  $\ell_b = 54,65 \text{ cm} \cong 54,50 \text{ cm}$ ;
- Comprimento de ancoragem com ganchos:  $\ell_{b, \text{gancho}} = 0,7 \cdot 54,50 = 38,20 \text{ cm}$ .

e) Comprimento a acrescentar em cada extremidade das barras

Em cada extremidade das barras, ao valor do comprimento  $a_t$  medido no diagrama de momentos fletores devem ser acrescentados os valores de  $a_t$  e de  $\ell_b$  ( $a_t + \ell_b = a_d$ ), quando possível (é preciso verificar se, ao somar esses valores, a extremidade da barra não fica fora da peça):

- barras sem ganchos:  $a_d = 63,5 + 54,50 = 118 \text{ cm}$ ;
- barras com ganchos:  $a_d = 63,5 + 38,2 = 101,7 \cong 102 \text{ cm}$ .

f) Ancoragem da armadura junto aos apoios

É necessário verificar se as barras que chegam aos apoios extremos estão adequadamente ancoradas, ou, por outro lado, pode-se calcular quantas barras devem chegar ao apoio e verificar quantas existem. Assim, os esforços de tração, junto aos apoios de vigas simples ou contínuas, devem ser resistidos por armaduras longitudinais que satisfaçam a mais severa das seguintes condições, dadas pela ABNT NBR 6118:2014 (ver seção 5.6):

f1) Armadura necessária para ancoragem da diagonal de compressão

Força necessária para ancorar a diagonal de compressão em apoios extremos (equação 5.14):

$$\bullet R_m = \frac{a_t}{d} \cdot V_d + N_d = \frac{0,635}{0,80} \cdot 1,4 \cdot 153,3 = 170,4 \text{ kN}$$

em que  $V_d$  é a força cortante no apoio, igual a 153,3 kN (considerando o centro do pilar),  $N_d = 0$  (não existe força de tração) e  $a_t = 63,5 \text{ cm}$ .

Armadura necessária para resistir a  $R_m$ :

$$\bullet A_{s, \text{nec}} = \frac{R_m}{f_{yd}} = \frac{170,4}{50 / 1,15} = 3,92 \text{ cm}^2 \Rightarrow 4 \phi 12,5 \text{ mm}$$

O detalhamento da armadura (Figura 5.22) resultou em duas posições de barras chegando próximas à face externa do apoio (4N10 e 2N11), com área de  $6 \cdot 1,25 = 7,5 \text{ cm}^2$ , maior que a necessária calculada em  $3,92 \text{ cm}^2$ , e, portanto, por este critério não há problema de ancoragem no apoio extremo.

## f2) Quantidade mínima de armadura imposta pela ABNT NBR 6118:2014

Em apoios extremos e intermediários, uma parte da armadura de tração do vão, correspondente ao máximo momento positivo do tramo, deve ser estendida até aos apoios:

- apoios extremos (momento nulo):

$$A_{s, \text{apoio}} \geq \frac{A_{s, \text{vão}}}{3} \geq \frac{8 \cdot 1,25}{3} \geq 3,33 \text{ cm}^2 \Rightarrow 3 \phi 12,5 \text{ mm (pelo critério anterior, são necessárias quatro barras);}$$

- apoio intermediário (momento negativo), com  $|M_{\text{apoio}}| > 0,5 \cdot M_{\text{vão}}$  ( $M_{\text{apoio}} = 408,8 \text{ kNm}$ , e  $M_{\text{vão}} = 230,0 \text{ kNm}$ ):

$$A_{s, \text{apoio}} \geq \frac{A_{s, \text{vão}}}{4} \geq \frac{8 \cdot 1,25}{4} \geq 2,50 \text{ cm}^2 \Rightarrow 2 \phi 12,5 \text{ mm}$$

Serão estendidas quatro barras da armadura positiva ( $\phi 12,5 \text{ mm}$ ) ao longo de toda a viga.

## f3) Comprimento de ancoragem das barras no apoio

### Apoios extremos

Na ancoragem da armadura de tração nos apoios extremos com momentos negativos ou nulos, as barras dessas armaduras, no caso com ganchos semicirculares ( $r = 2,5 \cdot \phi$ , raio de curvatura interno do gancho de uma barra de diâmetro  $\phi$ ), deverão ser ancoradas a partir da face do apoio, com comprimentos iguais ou superiores ao maior dos seguintes valores (a área necessária calculada é  $3,92 \text{ cm}^2$ , e existem 6 barras, com um total de  $7,5 \text{ cm}^2$ ):

$$\bullet \ell_{b, \text{nec}} = 0,7 \cdot \ell_b \cdot \frac{A_{s, \text{calc}}}{A_{s, \text{ef}}} = 0,7 \cdot 54,50 \cdot \frac{3,92}{7,50} \cong 20,0 \text{ cm} \geq \ell_{b, \text{min}}$$

$$\ell_{b, \text{min}} \geq \begin{cases} 0,3 \cdot \ell_b = 0,3 \cdot 54,50 = 16,35 \text{ cm} \\ 10 \cdot \phi = 10 \cdot 1,25 = 12,50 \text{ cm} \\ 100 \text{ mm} = 10,00 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \ell_{b, \text{nec}} \cong 20,0 \text{ cm};$$

- $(r + 5,5 \cdot \phi) = 2,5 \cdot \phi + 5,5 \cdot \phi = 8,0 \cdot \phi = 8,0 \cdot 1,25 = 10,00 \text{ cm};$
- 60 mm, ou 6 cm.

Portanto, as barras deverão ser ancoradas com o comprimento de 20,0 cm a partir da face do apoio. Como o apoio tem comprimento de 40,0 cm, e está sendo respeitado um cobrimento de 3,0 cm, as barras têm, a partir da face, 37,0 cm, sem contar os ganchos, comprimento maior que o necessário para atender a este critério.

#### Apoio intermediário

Quando se tratar de apoio intermediário em que não haja possibilidade da ocorrência de momentos positivos, o comprimento de ancoragem pode ser igual a  $10 \cdot \phi$ , no caso 12,5 cm, o que está respeitado, visto que o pilar interno tem 40 cm na direção da viga; entretanto, como quatro barras se estenderão ao longo da viga, esse critério está automaticamente atendido.

#### g) Cálculo do comprimento das emendas por traspasse

As barras que se estendem ao longo de todo o comprimento da viga (porta-estribos) deverão ser emendadas, pois o comprimento total da viga é maior que o comprimento comercial das barras. Se possível, as emendas devem ocorrer em trechos em que elas estejam comprimidas, pois assim todas podem ocorrer na mesma seção.

Nesta situação estão as barras N8 e N9 da armadura negativa (como cada trecho tem comprimento diferente, a identificação é distinta), emendadas propositadamente na região em que funcionam como porta-estribos (região comprimida, onde não têm função resistente); situação, similar ocorre com as barras N10 da armadura positiva, emendadas junto ao apoio central (cada trecho tem comprimento igual e a mesma identificação).

Desta maneira, o comprimento de traspasse é igual a  $\ell_{\alpha}$ , obedecendo a:

$$\ell_{\alpha} = \ell_{b, \text{net}} \geq \ell_{\alpha, \text{min}}$$

Admitindo, a favor da segurança, que  $A_{s, \text{calc}} = A_{s, \text{ref}} (\ell_{b, \text{net}} = \ell_b)$ ,  $\ell_{\alpha, \text{min}}$  deve ser o maior valor entre  $15 \cdot \phi$  ( $15 \cdot 1,25 = 18,75 \text{ cm}$ ) e 200 mm (20,0 cm). Assim, o comprimento do traspasse será igual ao comprimento de ancoragem, que atende aos valores mínimos:

$$\ell_{\alpha} = \ell_b = 54,5 \text{ cm}$$

#### h) Momento na ligação da viga com o pilar extremo e armadura necessária

Admitindo que a viga (25 × 90 cm) seja de um edifício de múltiplos pavimentos, e que em suas extremidades existam pilares (25 × 40 cm) inferior e superior (Figura 5.24), deve ser considerado, quando não for realizado o cálculo exato da influência da solidariedade dos pilares com a viga, um momento dado por:

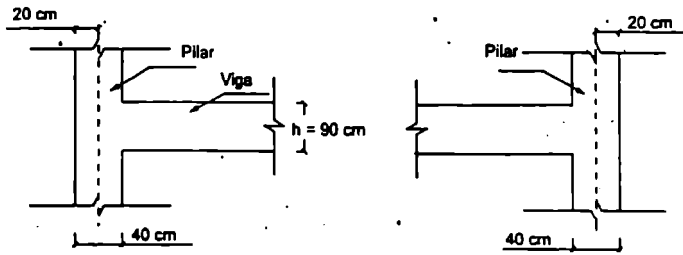


Figura 5.24 Ligação da viga com os pilares superior e inferior.

$$M_{\text{carr. viga}} = \frac{r_{\text{inf}} + r_{\text{sup}}}{r_{\text{inf}} + r_{\text{sup}} + r_{\text{viga}}} \cdot M_{\text{carr}}$$

$$M_{\text{carr. viga}} = \frac{2 \cdot 6,84 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 6,84 \cdot 10^{-4} + 19,0 \cdot 10^{-4}} \cdot 272,5 = 0,419 \cdot 272,5 = 114,2 \text{ kNm}$$

em que:

- momento de engastamento perfeito na extremidade da viga ( $p = 51,1 \text{ kN/m}$  e tramo com  $\ell = 8,0 \text{ m}$ ):

$$M_{\text{eng}} = \frac{p \cdot \ell^2}{12} = \frac{51,1 \cdot 8,0^2}{12} = 272,5 \text{ kNm}$$

- rigidez de cada elemento, admitindo para  $\ell_i$  dos pilares inferior e superior a metade da distância entre os eixos das vigas ( $3,90 \text{ m}/2$ ), sendo o vão do tramo igual a  $8,0 \text{ m}$ :

$$r_{\text{inf}} = r_{\text{sup}} = \frac{I_1}{\ell_i^3} = \frac{0,25 \cdot 0,40^3}{12 \cdot (3,9/2)^3} = 6,84 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$r_{\text{viga}} = \frac{I_1}{\ell_i^3} = \frac{0,25 \cdot 0,90^3}{12 \cdot 8,0^3} = 19,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

Na ligação, para resistir a esse momento, deve ser colocada uma armadura (Figura 5.25) calculada com  $d = 80 \text{ cm}$ ,  $b_w = 25 \text{ cm}$ ,  $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$  e aço CA50:

$$\text{KMD} = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{1,4 \cdot 114,2}{0,25 \cdot 0,8^2 \cdot 20000 / 1,4} = 0,07$$

$$\text{KMD} = 0,07 \Rightarrow \text{Quadro 3.1} \Rightarrow \text{KZ} = 0,9570 \Rightarrow \epsilon_s = 1,00\%$$

$$A_s = \frac{M_d}{KZ \cdot d \cdot f_{yd}} = \frac{1,4 \cdot 114,2}{0,9570 \cdot 0,8 \cdot 50 / 1,15} = 4,8 \text{ cm}^2 \Rightarrow 4\phi 12,5 \text{ mm}$$

O comprimento total da barra, detalhada na Figura 5.27 (barras N15), foi determinado a partir das parcelas relacionadas a seguir:

- Comprimento da curva: segundo o item 18.2.2 da ABNT NBR 6118:2014, o diâmetro interno da curvatura de barras dobradas, de CA50, não deve ser menor que  $15 \cdot \phi$ , resultando:

$$\ell_c = \frac{\pi \cdot D}{4} = \frac{\pi \cdot (15 \cdot \phi + \phi)}{4} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 1,25}{4} \cong 16 \text{ cm}$$

- Comprimento até o ponto de momento nulo: como não se conhece o diagrama de momentos na ligação, foi tomado como base o momento negativo no apoio (408,8 kNm) e feita uma relação linear com o momento de 114,2 kNm (veja Figura 5.21):

$$\ell_{m=0} = \frac{114,2 \cdot 200}{408,8} \cong 56 \text{ cm}$$

- Comprimento após o ponto de momento nulo: foi acrescentado o valor de 118 cm, correspondente à ancoragem mais o deslocamento do diagrama.
- Comprimento reto no pilar: foi tomado, após a curva, o valor de 55 cm, correspondente ao comprimento de ancoragem.
- Comprimento total:  $\ell = 16 + 56 + 118 + 55 = 245 \text{ cm}$

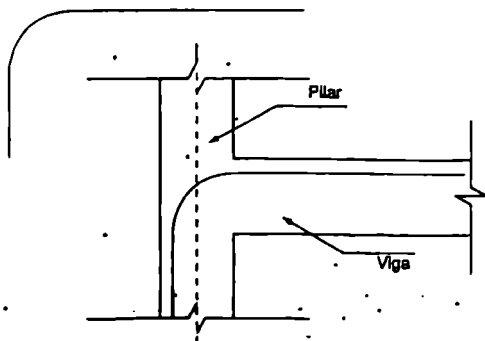


Figura 5.25 Armadura para combater o momento na viga na ligação com os pilares.

### i) Comprimento das barras da armadura longitudinal de tração

Para a determinação do comprimento final de cada barra, é necessário o valor medido no diagrama (a), o comprimento de ancoragem mais o valor do deslocamento do diagrama ( $a_d = 63,5 + 54,50 = 118$  cm), o comprimento dos ganchos semicirculares ( $\ell_g = 14$  cm, exemplo 3) para as barras que forem levadas até aos apoios extremos e o comprimento da emenda por traspasso ( $\ell_{tr} = 54,5$  cm); o cobrimento empregado é 3,0 cm. Cabe destacar que duas barras da armadura negativa (2N8 e 2N9, que se complementam) se estendem de apoio extremo a apoio extremo, e o mesmo acontece com quatro barras da armadura positiva (4N10, emendadas no meio da viga). A armadura de cisalhamento está calculada no capítulo 6. Os detalhes estão nas figuras 5.26, 5.27 e 5.29:

#### Barras da armadura negativa

- N1 (2 barras):  $\ell = 2 \cdot 22,5 + 2 \cdot 118 = 281$  cm
- N2 (2 barras):  $\ell = 2 \cdot 40 + 2 \cdot 118 = 316$  cm
- N3 (2 barras):  $\ell = 2 \cdot 65 + 2 \cdot 118 = 366$  cm
- N4 (2 barras):  $\ell = 2 \cdot 90 + 2 \cdot 118 = 416$  cm
- N5 (2 barras):  $\ell = 2 \cdot 115 + 2 \cdot 118 = 466$  cm
- N6 (2 barras):  $\ell = 2 \cdot 140 + 2 \cdot 118 = 516$  cm
- N7 (2 barras):  $\ell = 2 \cdot 160 + 2 \cdot 118 = 556$  cm
- N8 (2 barras, do apoio esquerdo até a emenda com a N9):  $\ell = 1200$  cm

Seção da viga, a partir do apoio externo esquerdo, em que termina a barra de 1200 cm:  $1200 - 14 + 3 + 4,4 = 1193,4$  cm.

Distância dessa seção ao extremo direito da viga:  $1640 - 1193,4 = 446,6$  cm.

- N9 (2 barras, até o apoio direito, complementando a N8):

$\ell = 446,6 - 3 - 4,4 + 14 + 54,5 \cong 508$  cm (Figura 5.26)

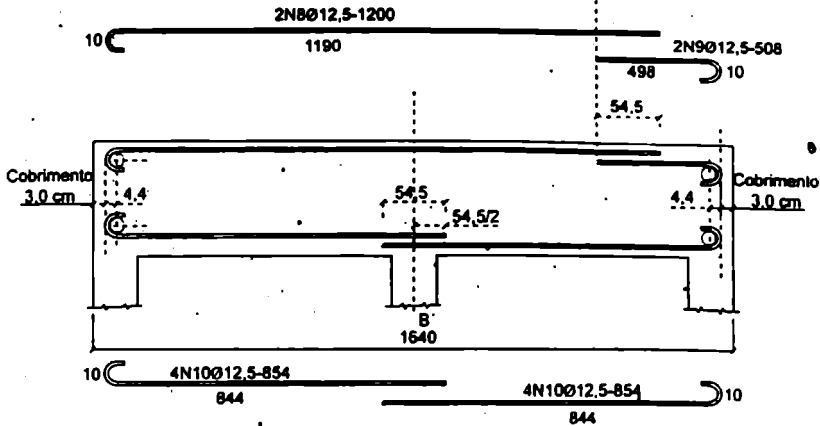


Figura 5.26 Determinação do comprimento das barras N8, N9 e N10 (cm).

### Barras da armadura positiva

- N10 (4 barras, do centro ao apoio externo, em cada tramo, com um total de 8 barras):

$$\ell = 1640/2 - 3 - 4,4 + 14 + 54,5/2 \cong 854 \text{ cm (Figura. 5.26)}$$

- N11 (2 barras em cada tramo, chegando uma extremidade ao apoio externo, sendo  $a_1 = 425$  cm e a distância do diagrama ao centro do pilar igual a 90 cm):

$$\ell = 425 + 90 + 20 - 3 - 4,4 + 14 + 118 \cong 660 \text{ cm}$$

- N12 (2 barras em cada tramo, não chegando aos apoios):

$$\ell = 300 + 2 \cdot 118 \cong 536 \text{ cm}$$

j) Armadura de pele (detalhes no exemplo 1 do capítulo 4 e nas figuras 5.27 e 5.29)

Seção do tramo (barra do centro do apoio até 118 cm após o ponto de momento nulo):

- N13  $7 \phi 6,3$  a cada 9,0 cm, por face (2 tramos,  $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$  barras):  $\ell = 600 + 118 = 718$  cm

Seção do apoio (barra com 118 cm em cada extremidade após os pontos de momento nulo):

- N14  $7 \phi 6,3$  a cada 5,5 cm, por face ( $2 \cdot 7 = 14$  barras):  $\ell = 2 \cdot 200 + 2 \cdot 118 = 636$  cm

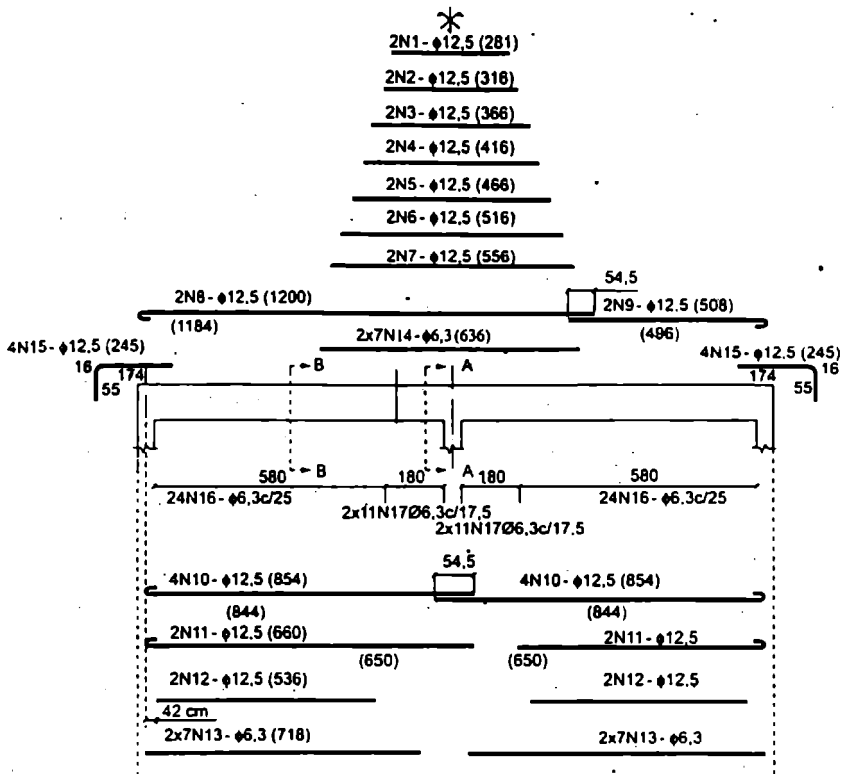


Figura 5.27 Armadura longitudinal ao longo da viga e estribos (medidas em cm).

k) Armadura transversal – estribos (calculada no capítulo 6 e indicada na Figura 5.28)  
 O comprimento dos estribos é calculado somando-se ao comprimento reto três curvas (90°) e dois ganchos retos, com cobrimento de 3,0 cm e  $\phi_1 = 6,3$  mm; para estribos com diâmetro menor que 10 mm, o diâmetro do pino de dobramento é  $3 \cdot \phi_1$  e a ponta de ganchos retos é  $10 \cdot \phi_1$ .

Estribos simples:

Comprimento reto dos estribos simples para a viga com seção 25 × 90 cm (Figura 5.28):

$$\ell_{\text{reto}} = \ell_{\text{livre}} - 8 \cdot (2,5 \cdot \phi_1) = 2 \cdot (90 - 2 \cdot 3) + 2 \cdot (25 - 2 \cdot 3) - 8 \cdot 2,5 \cdot 0,63 \cong 195 \text{ cm}$$

Comprimento de uma curva

$$\ell_{\text{curva}} = \frac{\pi \cdot D}{4} = \frac{\pi \cdot (3 \cdot \phi_1 + \phi_1)}{4} \cong 2 \text{ cm}$$

Comprimento do gancho reto:

$$\ell_{g, \text{reto}} = 10 \cdot \phi_i (\text{pta reta}) + \frac{\pi \cdot (3 \cdot \phi_i + \phi_i)}{4} = 10 \cdot \phi_i + \pi \cdot \phi_i \cong 8 \text{ cm}$$

Comprimento total de um estribo simples:

$$\ell_{\text{est}} = \ell_{\text{reto}} + 3 \cdot \ell_{\text{curva}} + 2 \cdot \ell_{g, \text{reto}} = 195 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 8 = 217 \text{ cm}$$

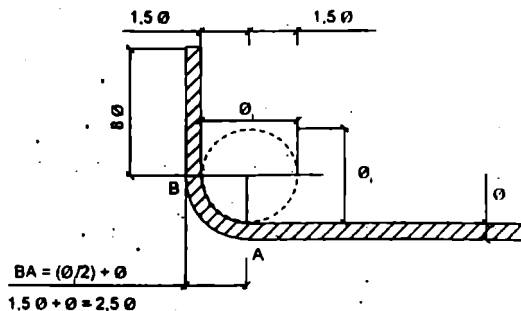


Figura 5.28 Esquema para cálculo do comprimento reto dos estribos.

Estribos duplos:

Nos estribos duplos há apenas variação de comprimento reto nos ramos horizontais, que terão comprimento de 12 cm ( $7,84 + 4,3 = 12,14 \cong 12$  cm, ver Figura 4.16), resultando para o comprimento reto do estribo:

$$\ell_{\text{reto}} = 2 \cdot (90 - 2 \cdot 3) + 2 \cdot 12 - 4 \cdot 2,5 \cdot 0,63 \cong 186 \text{ cm}$$

Comprimento total de um estribo duplo, sendo as curvas e os ganchos retos iguais:

$$\ell_{\text{est}} = \ell_{\text{reto}} + 3 \cdot \ell_{\text{curva}} + 2 \cdot \ell_{g, \text{reto}} = 186 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 8 = 208 \text{ cm}$$

Assim, os estribos constituintes da armadura transversal ao longo da viga, detalhada no capítulo 6, são:

- N16 (48 estribos,  $\phi$  6,3 mm):  $\ell = 217$  cm (estribos simples);
- N17 (44 estribos,  $\phi$  6,3 mm):  $\ell = 208$  cm (estribos duplos).

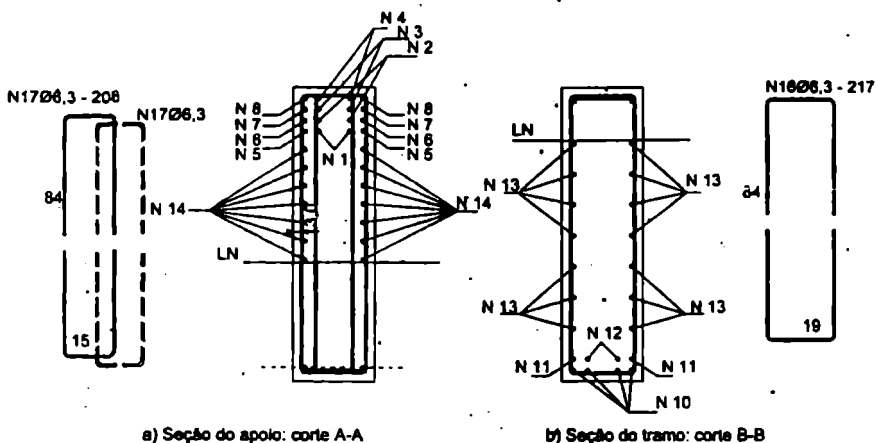


Figura 5.29 Detalhe da armadura nas seções transversais (medidas em cm).

### 1) Relação e quantidade da armadura utilizada na viga

- Lista de todas as barras da viga contendo o diâmetro, a quantidade de barras, o comprimento unitário e o total para cada uma (Quadro 5.5);
- Lista resumo de acordo com o diâmetro das barras contendo o comprimento total, o peso total e um acréscimo de 10% (Quadro 5.6).

Quadro 5.5 Relação das barras da viga.

Número e função da barra	Diâmetro ( $\phi$ em mm)	Quantidade	Comprimento (cm)	
			Unitário	Total
1 (negativa)	12,5	2	281	562
2 (negativa)	12,5	2	316	632
3 (negativa)	12,5	2	366	732
4 (negativa)	12,5	2	416	832
5 (negativa)	12,5	2	466	932
6 (negativa)	12,5	2	516	1.032
7 (negativa)	12,5	2	556	1.112
8 (negativa)	12,5	2	1200	2.400
9 (negativa)	12,5	2	508	1.016
10 (positiva)	12,5	$2 \cdot 4 = 8$	854	6.832
11 (positiva)	12,5	$2 \cdot 2 = 4$	660	2.640

Quadro 5.5 Continuação...

Número e função da barra	Diâmetro ( $\phi$ em mm)	Quantidade	Comprimento (cm)	
			Unitário	Total
12 (positiva)	12,5	$2 \cdot 2 = 4$	536	2.144
13 (pele)	6,3	$2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$	718	20.104
14 (pele)	6,3	$2 \cdot 7 = 14$	636	8.904
15 (ligação)	12,5	$2 \cdot 4 = 8$	245	1.960
16 (estribo simples)	6,3	$2 \cdot 24 = 48$	217	10.416
17 (estribo duplo)	6,3	$2 \cdot 2 \cdot 11 = 44$	208	9.152

Quadro 5.6 Resumo da quantidade de aço utilizada na armadura da viga.

Diâmetro ( $\phi$ mm)	Comprimento (m)	Peso (kgf)	Peso + 10% (kgf)
6,3 (0,25 kgf/m)	486,0	122,0	134,0
12,5 (1,00 kgf/m)	228,3	228,3	251,0
Total			385,0

m) Taxa de armadura da viga (kgf aço/m<sup>3</sup> concreto)

- Volume concreto:  $0,25 \text{ m} \cdot 0,90 \text{ m} \cdot 16,40 \text{ m} = 3,69 \text{ m}^3$ ;
- Peso total do aço: 385,0 kgf;
- Taxa de armadura =  $\frac{385}{3,69} = 104,3 \text{ kgf} / \text{m}^3$ .

## ADENDO

### RESUMO DAS EXPRESSÕES RELACIONADAS NESTE CAPÍTULO

Relação entre momento fletor e armadura
$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_{yd}} \quad (5.1)$
Tensão de aderência entre aço e concreto
$\tau_b = \frac{A_s \cdot d\sigma_s}{\pi \cdot \phi \cdot d_s} = \frac{A_s}{\pi \cdot \phi} \cdot \frac{d\sigma_s}{dx} \quad (5.2)$

Resistência de aderência
$f_{bd} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot f_{ctd}$ $\eta_1 = 1,0 \text{ para barras lisas (CA25);}$ $\eta_1 = 1,4 \text{ para barras entalhadas (CA60);}$ $\eta_1 = 2,25 \text{ para barras alta aderência (CA50);}$ $\eta_2 = 1,0 \text{ para situações de boa aderência;}$ $\eta_2 = 0,7 \text{ para situações de má aderência;}$ $\eta_3 = 1,0 \text{ para } \phi < 32 \text{ mm } (\phi \text{ é o diâmetro da barra, em mm);}$ $\eta_3 = \frac{132 - \phi}{100} \text{ para } \phi > 32 \text{ mm (com o diâmetro } \phi \text{ em milímetros).}$ <span style="float: right;">(5.3)</span>
Comprimento básico de ancoragem
$\ell_b = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{bd}}$ <span style="float: right;">(5.4)</span>
Comprimento necessário de ancoragem
$\ell_{b,nec} = \alpha_1 \cdot \ell_b \cdot \frac{A_{s,calc}}{A_{s,ef}} \geq \ell_{b,min}$ <span style="float: right;">(5.5)</span> $\alpha_1 = 1,0 \text{ (barras sem gancho);}$ $\alpha_1 = 0,7 \text{ (barras tracionadas com gancho).}$
Comprimento do trecho de emenda por traspasse
$\ell_{0t} = \alpha_{0t} \cdot \ell_{b,nec} \geq \ell_{0t,min}$ <span style="float: right;">(5.6)</span>
Comprimento da emenda por traspasse para barras comprimidas
$\ell_{0c} = \ell_{b,nec} \geq \ell_{0c,min}$ <span style="float: right;">(5.7)</span>
Deslocamento (decalagem) do diagrama de força no banzo tracionado no modelo I
$\left\{ \begin{array}{l} 0,5 \cdot d \text{ (caso geral)} \\ 0,2 d \text{ (estribos a } 45^\circ) \end{array} \right\} \leq a_t = d \cdot \left[ \frac{V_{Sd,max}}{2 \cdot (V_{Sd,max} - V_c)} \cdot (1 + \cot \alpha) - \cot \alpha \right] \leq d$ <span style="float: right;">(5.8)</span>
Se $ V_{Sd,max}  \leq  V_c $ usar $a_t = d$
Parcela da força cortante absorvida por mecanismos adicionais ao de treliça
$V_c = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d$ <span style="float: right;">(5.9)</span>

Deslocamento (decalagem) do diagrama de força no banco tracionado no modelo I no caso de estribos verticais

$$a_t = d \cdot \left[ \frac{V_{sd, \max}}{2 \cdot (V_{sd, \max} - V_c)} \right] \leq d \quad (5.10)$$

Força de tração, em uma seção

$$F_{Sd, cor} = \left[ \frac{M_{Sd}}{z} + |V_{Sd}| \cdot (\cot \theta - \cot \alpha) \cdot \frac{1}{2} \right] \leq \frac{M_{Sd, \max}}{z} \quad (5.11)$$

Deslocamento (decalagem) do diagrama de força no banco tracionado no modelo II

$$a_t = 0,5 \cdot d \cdot (\cot \theta - \cot \alpha) \geq \begin{cases} 0,5 \cdot d \text{ (caso geral)} \\ 0,2 \cdot d \text{ (estribos inclinados a } 45^\circ) \end{cases} \quad (5.12)$$

Deslocamento (decalagem) do diagrama de força no banco tracionado no modelo II no caso de estribos verticais

$$a_t = 0,5 \cdot d \cdot \cot \theta \geq 0,5 \cdot d \quad (5.13)$$

Força a resistir na ancoragem em apoios extremos

$$R_{st} = \frac{a_t}{d} \cdot V_d + N_d \quad (5.14)$$

Momento fletor aproximado em extremidade de vigas

$$M_{cor, viga} = \frac{r_{inf} + r_{sup}}{r_{inf} + r_{sup} + r_{viga}} \cdot M_{eng} \quad (5.15)$$



## CAPÍTULO 6

### CISALHAMENTO: CÁLCULO DA ARMADURA TRANSVERSAL

#### 6.1 INTRODUÇÃO

Até aqui foi estudada uma viga submetida à flexão pura e, neste caso, o momento fletor é constante, e a força cortante, que pode ser expressa pela derivada do momento (Quadro 6.1), é nula. Assim, atuam na seção transversal apenas tensões normais que permitem equilibrar o momento fletor. As tensões normais são resistidas pelo concreto comprimido e pela armadura longitudinal tracionada (e por uma armadura longitudinal comprimida nos casos de armadura dupla). Por essa razão, no cálculo da armadura longitudinal, feito no capítulo 3, foram analisadas apenas as seções mais solicitadas pelo momento fletor sem nenhuma interferência da força cortante.

Na realidade, as vigas submetidas a um carregamento vertical qualquer, com ou sem força normal, estão trabalhando em flexão simples ou composta não pura, sendo variável, nesta situação, o momento fletor, e sendo a força cortante, portanto, diferente de zero, surgindo na seção transversal, além das tensões normais, tensões tangenciais, que equilibram o esforço cortante.

Quadro 6.1 Tipos de flexão e tensões atuantes na seção transversal.

Flexão	Momento fletor $M$	Cortante $V = \frac{dM}{dx}$	Tensões atuantes na seção
Pura	Constante	$V = 0$	$\sigma$ (normal)
Não pura	Variável	$V \neq 0$	$\sigma$ (normal) e $\tau$ (tangencial)

Ao contrário da situação em que é possível existir momento fletor sem força cortante (flexão sem cisalhamento), não é possível a existência de trechos da viga em que ocorra cortante sem momento (cisalhamento sem flexão).

Dessa forma, na flexão não pura, juntamente com as tensões tangenciais, sempre atuam tensões normais de flexão, formando um estado biaxial, ou duplo, de tensões, com tensões principais de tração e compressão, em geral, inclinadas em relação ao eixo da viga (seção 6.3). É um problema de solução complexa, com mecanismos resistentes essencialmente tridimensionais.

No estudo do cisalhamento influem:

- forma da seção;
- variação da forma da seção ao longo da peça;
- esbeltez da peça  $\left(\frac{\ell}{d} \geq 2\right)$ ;
- disposição das armaduras transversais e longitudinais;
- aderência;
- condições de apoio e carregamento etc.

A consideração de  $\left(\frac{\ell}{d} \geq 2\right)$  é para que o estudo se resume às vigas, nas quais a seção transversal permanece plana após a deformação, pois quando a relação é inferior a 2 as seções transversais sofrem um “empenamento”, não continuando plana após a deformação; a estrutura com essas características é chamada de viga-parede. (Figura 6.1).

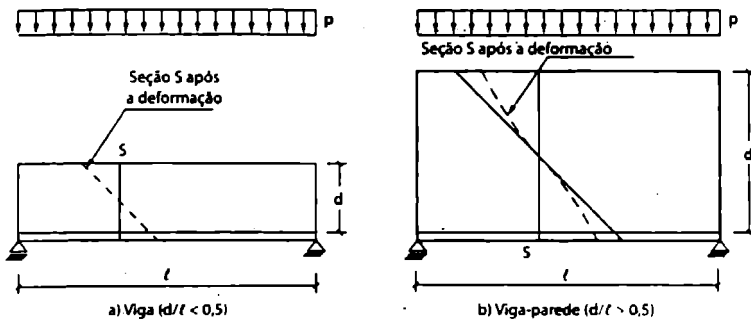


Figura 6.1 a) viga (a seção após a deformação permanece plana); b) viga parede (a seção sofre um empenamento após a deformação).

Para cargas de pequena intensidade, em que as tensões de tração não superam a resistência à tração do concreto (estádio I), o problema da análise das tensões tangenciais é simples; quando se aumenta o carregamento e o concreto torna-se fissurado (estádio II), é produzido um complexo reajuste de tensões entre concreto e armadura, que podem crescer até chegar à ruptura. Na alma da viga, as tensões de compressão são resistidas pelo concreto comprimido, que se mantém íntegro entre as fissuras (bielas comprimidas), e as tensões de tração são resistidas por uma armadura transversal (armadura de cisalhamento).

A armadura transversal proporciona segurança frente aos distintos tipos de ruptura e, ao mesmo tempo, mantém a fissuração dentro de limites admissíveis. Neste capítulo, será estudado primeiramente o modo de cálculo dessa armadura e, em seguida, como pode ser evitado o esmagamento do concreto da alma da viga, com a verificação das tensões de compressão nas bielas de concreto.

Como ainda não há uma solução que seja, ao mesmo tempo, precisa e simples, a maioria dos procedimentos adota um tratamento independente para as tensões de flexão e cisalhamento em uma viga, e admitem que a contribuição das armaduras transversais e do concreto comprimido, na resistência ao esforço cortante, pode ser obtida por meio da analogia de treliça de Ritter-Mörsch (seção 6.4).

É conveniente destacar que as peças fletidas devem ser dimensionadas de modo que, se atingirem a ruína, esta ocorra pela ação do momento fletor, que leva a grandes deformações antes da ruptura por cisalhamento.

O perfeito funcionamento das peças fletidas de concreto armado pode ser garantido verificando-se em cada seção transversal a condição de utilização (fissuração) e de ruptura (escoamento da armadura de tração e esmagamento do concreto). Essas verificações já foram feitas na flexão pura, a fissuração no quarto capítulo e as demais no terceiro. Nas peças em flexão não pura, portanto com cisalhamento, a verificação da fissuração é mais usual nas peças protendidas; nas de concreto armado, normalmente um bom detalhamento da armadura transversal é suficiente para evitar um estado de fissuração inaceitável na alma das vigas.

Na Figura 6.2 estão esquematizados alguns tipos de colapso que podem ocorrer em vigas devido à ação da força cortante (cisalhamento);<sup>31</sup> no caso *a*, a ruptura é por escoamento da armadura transversal, no *b*, o concreto da biela comprimida na alma da viga é esmagado; e em *c*, o colapso ocorre por falha na ancoragem da biela junto ao apoio (escorregamento da armadura longitudinal).

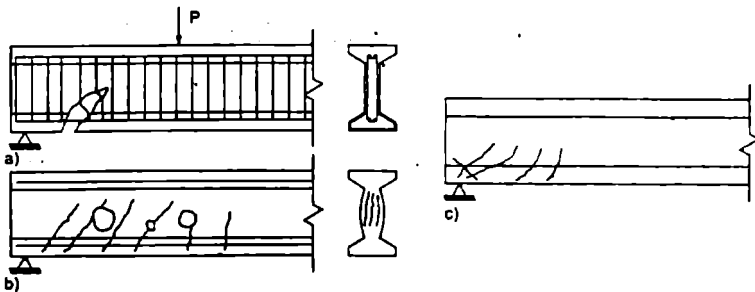


Figura 6.2 Situações de colapso em uma viga devidas ao cisalhamento: a) escoamento da armadura; b) esmagamento do concreto; c) falha na ancoragem.

Segundo Furlan Junior,<sup>32</sup> ainda pode ocorrer ruptura por força cortante-flexão e por flexão da armadura longitudinal. No primeiro caso, o concreto do banzo comprimido (região acima da linha neutra) é esmagado em decorrência do “avanço” ou da “penetração” das fissuras diagonais (inclinadas) nessa região. No segundo caso, surgem

31 Rüsç (1975).

32 Furlan Junior (1995).

deficiências localizadas na região da armadura longitudinal que apresenta resistência insuficiente para suportar a flexão localizada causada pelo apoio das bielas (região de concreto íntegro entre fissuras) entre os estribos.

### 6.2 TENSÕES NORMAIS E TANGENCIAIS EM UMA VIGA

Pode-se considerar, para efeito de cálculo, que o concreto seja um material homogêneo, e, assim, desprezar a presença da armadura nele. Dessa maneira, é possível calcular as tensões atuantes em vigas utilizando os conceitos da resistência dos materiais. É óbvio que estas hipóteses valem até que se inicie a fissuração do concreto. Assim, em uma viga de seção constante, sujeita à flexão simples não pura, as tensões normais ( $\sigma$ ) e tangenciais ( $\tau$ ) variam de fibra a fibra ao longo da altura da seção (Figura 6.3), e podem ser calculadas pelas expressões:

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y \tag{6.1}$$

$$\tau = \frac{V \cdot M_x}{b_w \cdot I} \tag{6.2}$$

em que:

$M$  – momento fletor;

$y$  – distância do CG (centro de gravidade) da seção ao ponto considerado;

$V$  – força cortante;

$M_x$  – momento estático da área da seção homogênea situada acima da fibra de ordenada  $y$  em relação à linha neutra;

$b_w$  – largura da seção;

$I$  – momento de inércia da seção em relação a seu CG.

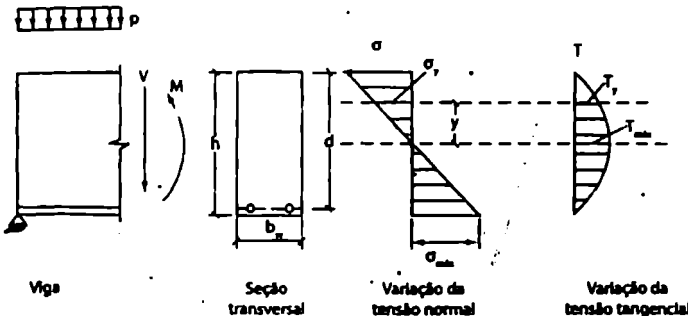


Figura 6.3 Distribuição das tensões normais e tangenciais em uma seção retangular, desprezando a armadura.

Para uma dada seção, sob uma força cortante  $V$ , o valor máximo da tensão tangencial ocorre, pela equação 6.2, quando o momento estático também for máximo. O momento estático (ou momento de primeira ordem) é determinado pela integral  $\int y \cdot dA$ , e para uma viga retangular de seção transversal ( $b_w, h$ ) obtém-se (Figura 6.4):

$$M_s = y \cdot A = y \cdot b_w \cdot k = b_w \cdot k \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{k}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot b_w \cdot (k \cdot h - k^2) \quad (6.3)$$

O valor máximo de  $M_s$  é obtido fazendo sua derivada em relação a  $k$  ser igual a zero:

$$\frac{dM_s}{dk} = \frac{1}{2} \cdot b_w \cdot (h - 2 \cdot k) = 0$$

resultando  $k = h/2$ ; ou seja, a máxima tensão de cisalhamento ocorre no CG (no caso, na LN); substituindo esse valor na expressão de  $M_s$ , chega-se a:

$$M_{s,max} = \frac{b_w \cdot h^2}{8} \quad (6.4)$$

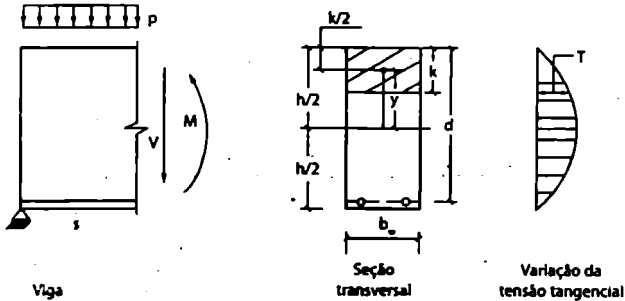


Figura 6.4 Cálculo de  $M_s$  e  $\tau$  na seção transversal retangular de uma viga.

Finalmente, a tensão máxima de cisalhamento torna-se:

$$\tau_{max} = \frac{V \cdot M_{s,max}}{b_w \cdot I} = \frac{V \cdot \frac{b_w \cdot h^2}{8}}{b_w \cdot \frac{b_w \cdot h^3}{12}} \rightarrow \tau_{max} = \frac{1,5 \cdot V}{b_w \cdot h} \quad (6.5)$$

Da Figura 6.5, sendo  $z$  o braço de alavança, resulta  $h = \frac{3 \cdot z}{2}$  e, então:

$$\tau_{\max} = \frac{1,5 \cdot V}{b_w \cdot h} = \frac{1,5 \cdot V}{b_w \cdot \frac{3 \cdot z}{2}} = \frac{1,5 \cdot V}{b_w \cdot 1,5 \cdot z} \rightarrow \tau_{\max} = \frac{V}{b_w \cdot z} \quad (6.6)$$

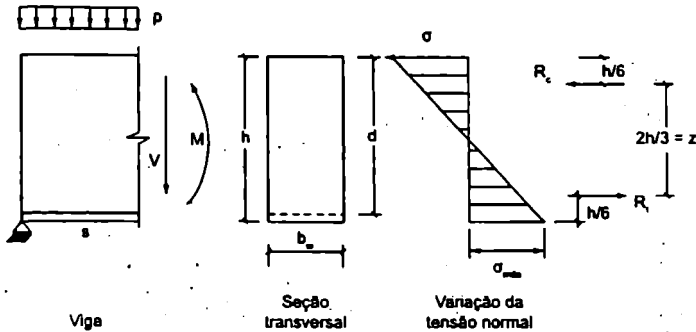


Figura 6.5 Braço de alavanca das resultantes das tensões de compressão ( $R_c$ ) e de tração ( $R_t$ ) (estádio I, concreto não fissurado).

Embora a expressão anterior tenha sido obtida para o estágio I, também será empregada no estado limite último, como será visto posteriormente.

### 6.3 TENSÕES PRINCIPAIS

Em uma viga fletida, sob ação de momento fletor variável, também atuam forças cortantes, e em toda a altura de uma seção transversal retangular, ou na alma de outras seções, surgem tensões, chamadas de principais, de tração e compressão ( $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , respectivamente) inclinadas em relação ao eixo da peça. As tensões principais podem ser decompostas nas componentes  $\sigma_x$  (tensão normal segundo  $x$ ),  $\sigma_y$  (tensão normal segundo  $y$ ) e  $\tau_{xy}$  (tensão tangencial); em vigas, normalmente, as tensões  $\sigma_y$  têm valor muito pequeno, com importância apenas em pontos de introdução de cargas concentradas, podendo, portanto, em geral ser desprezadas. Assim, na sequência, o valor de  $\sigma_y$  será sempre considerado nulo.

Em outras palavras, em um elemento solicitado por tensões normais e tangenciais, sempre é possível encontrar um plano com uma inclinação  $\alpha$  no qual as tensões tangenciais são nulas e as normais alcançam seus valores máximo e mínimo, que são as **tensões principais**. Essas tensões podem ser determinadas em qualquer ponto de qualquer seção da peça, analiticamente ou por meio do Círculo de Mohr.

Seja uma viga sujeita à flexão simples (Figura 6.6), da qual se deseja obter as tensões principais em dois pontos: um na região comprimida (ponto 1) e outro na linha neutra (ponto 2).

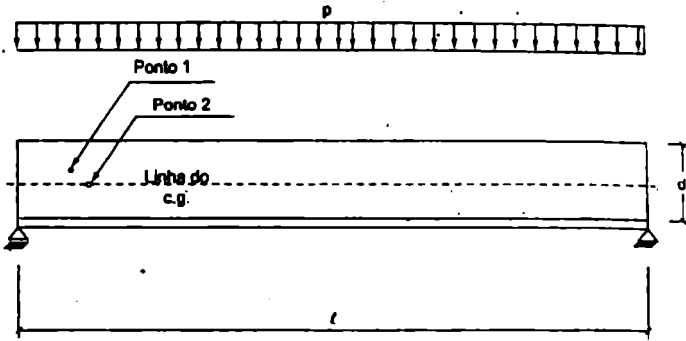


Figura 6.6 Pontos para análise das tensões principais de uma viga simplesmente apoiada sob carregamento uniforme.

Desses pontos são retirados dois elementos infinitesimais, em que atuam tensões normais  $\sigma$  e tangenciais  $\tau$ ; pelo Círculo de Mohr determinam-se as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  e suas inclinações em relação ao eixo da viga para os pontos 1 e 2 (Figura 6.7).

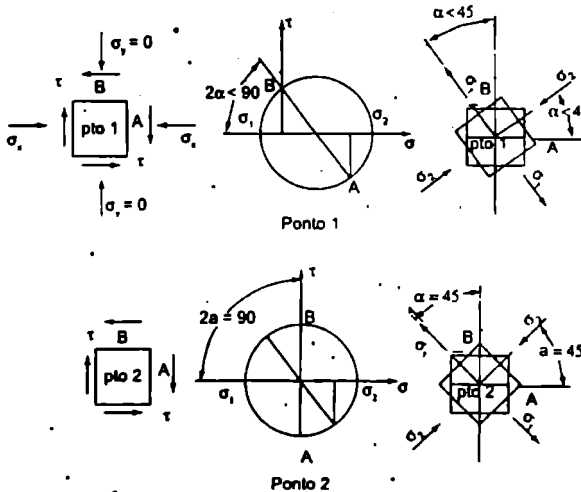


Figura 6.7 Determinação das tensões principais nos pontos 1 e 2 usando o Círculo de Mohr.

Como pode ser visto na Figura 6.7, para pontos situados no CG (pontos do tipo 2) só há tensão de cisalhamento  $\tau$ , portanto, a tensão principal de tração ocorrerá a  $45^\circ$ . Já para os pontos do tipo 1, onde há compressão (abaixo da linha neutra seria tração), a tensão principal ocorrerá com um ângulo inferior a  $45^\circ$ .

Observe que está sendo usada a convenção, para concreto armado e protendido, em que as tensões de compressão são positivas e as de tração são negativas.

Para um estado duplo de tensões em vigas (Figura 6.8), segundo Mohr, as tensões principais podem ser determinadas analiticamente pelas expressões:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.7)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.8)$$

A direção  $\alpha$  (inclinação) de  $\sigma_1$  em relação ao eixo x é dada por:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (6.9)$$

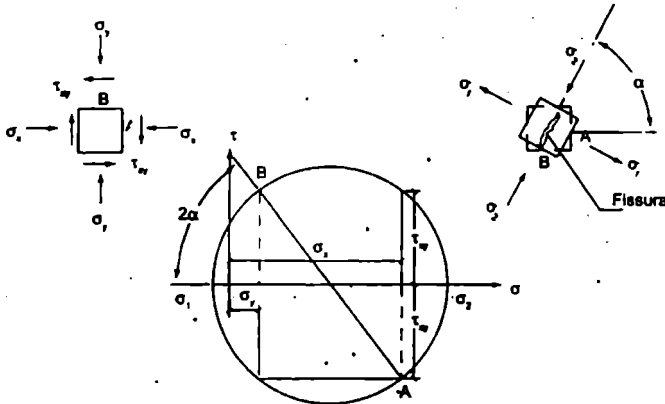


Figura 6.8 Estado plano de tensões e direções principais.

Como em vigas pode-se fazer  $\sigma_y = 0$  (só há valores de tensões normais verticais apreciáveis onde atuam cargas externas de alta intensidade), e fazendo  $\tau_{xy} = \tau$ , as equações anteriores tornam-se:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau}{\sigma_x}$$

Na linha neutra e abaixo, o concreto não contribui na resistência às tensões normais de tração, que são equilibradas apenas pela armadura longitudinal, e, portanto,  $\sigma_x = 0$ , que nas equações anteriores resulta:

$$\sigma_1 = +\sqrt{\tau^2} = +\tau \quad \sigma_2 = -\sqrt{\tau^2} = -\tau \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \infty \rightarrow 2\alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

### Conclusões:

- Na linha neutra, as tensões principais  $\sigma_1$  (tração) e  $\sigma_2$  (compressão) estão inclinadas  $45^\circ$  em relação ao eixo da viga e são iguais, em intensidade, às tensões tangenciais  $\tau$ , principalmente próximo aos apoios, onde a força cortante é maior;
- As fissuras no concreto são perpendiculares à direção da tensão principal de tração (Figura 6.8);
- As tensões principais de tração  $\sigma_1$  devem ser resistidas por uma armadura de cisalhamento que atravesse as fissuras, e cujo cálculo será visto na sequência;
- As tensões principais de compressão  $\sigma_2$  são resistidas pelo concreto comprimido localizado entre as fissuras (bielas de concreto), cuja verificação também será vista a seguir.

## 6.4 ANALOGIA DE TRELIÇA DE MÖRSCH

Por volta de 1900, W. Ritter e E. Mörsch<sup>33</sup> propuseram, para a determinação da armadura de cisalhamento necessária ao equilíbrio de uma viga de concreto armado, uma teoria em que o mecanismo resistente da viga no estágio II (fissurada) pudesse ser associado ao de uma treliça em que as armaduras e o concreto equilibrassem conjuntamente o esforço cortante.

O modelo proposto por Mörsch não foi inicialmente bem aceito, mas, com o desenvolvimento das técnicas de ensaio de estruturas, constatou-se que ele poderia ser empregado, desde que fossem feitas correções adequadas. A teoria teve, assim, reconhecimento mundial, e mesmo que muita coisa tenha mudado desde então (as resistências do concreto e do aço aumentaram, a aderência obtida com aços corrugados levou ao desuso as barras lisas etc.), os princípios apresentados por Mörsch continuam válidos, e ainda hoje são a base do cálculo ao cisalhamento dos mais importantes regulamentos. A grande vantagem é que, embora sendo simples, o modelo conduz a resultados satisfatórios para a quantidade da armadura transversal no estado limite último. Destaca-se que será empregada em todo o capítulo, quando cabível, a simbologia adotada pela ABNT NBR 6118:2014 para a designação de todas as grandezas envolvidas.

### 6.4.1 FUNCIONAMENTO BÁSICO E ELEMENTOS CONSTITUINTES

Uma viga esbelta simplesmente apoiada de concreto, com armadura longitudinal e transversal, sob flexão simples terá, próximo à ruptura, o aspecto mostrado na Figura

33 Mörsch (1948).

6.9. Ela apresenta fissuras inclinadas na zona em que o cisalhamento é predominante (principalmente próximo aos apoios, onde a força cortante é maior) e, entre elas, elementos de concreto comprimidos (bielas comprimidas).

A partir da configuração da viga na ruptura, Mörsch idealizou um mecanismo resistente assemelhando a viga a uma treliça, de banzos paralelos e isostática, em que os elementos resistentes são as armaduras longitudinal e transversal e o concreto comprimido (nas bielas e na região da borda superior), cujas interseções formam os nós da treliça.

O conceito de bielas de compressão (concreto íntegro entre as fissuras) é importante, pois mostra como o aço e o concreto se unem para transferir cargas, e também como o concreto comprimido trabalha e tem participação importante na resistência ao cisalhamento de peças fletidas.

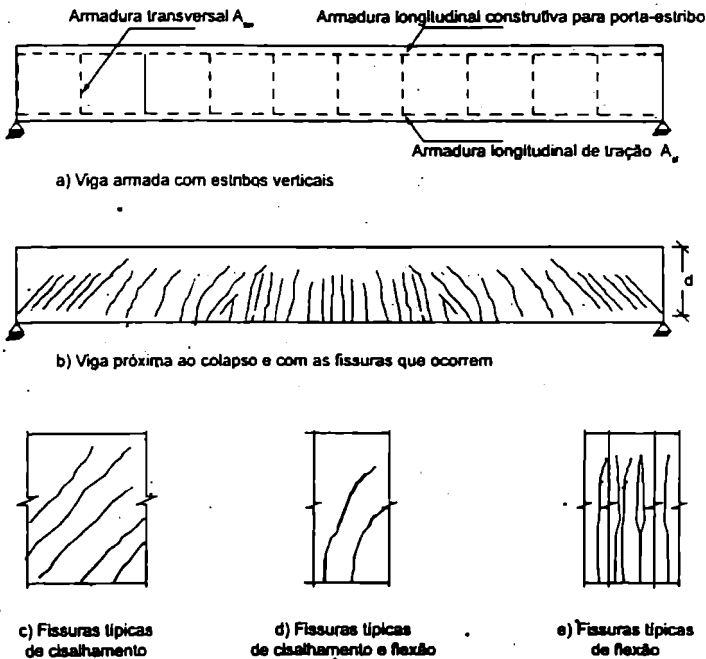


Figura 6.9 Viga na iminência da ruptura e os tipos de fissura que podem ocorrer.

Considera-se que a inclinação ( $\alpha$ ) da armadura de cisalhamento está entre  $45^\circ$  (na direção das tensões principais de tração) e  $90^\circ$ , e que os elementos de concreto comprimido estão inicialmente inclinados a  $45^\circ$  (na direção das tensões principais de compressão). Experiências mostram, entretanto, que o ângulo de inclinação das bielas é menor que  $45^\circ$ , o que será corrigido posteriormente.

Os elementos da treliça (Figura 6.10) são:

1. Banzo superior comprimido: formado pela região comprimida de concreto acima da linha neutra, de altura  $x$ ;
2. Banzo inferior tracionado: formado pelas barras da armadura longitudinal de tração;
3. Montantes ou diagonais tracionadas: formadas pela união dos estribos que cruzam certa fissura; podem ter inclinação ( $\alpha$ ), em relação ao eixo longitudinal da viga, entre  $45^\circ$  (Figura 6.10b) e  $90^\circ$  (Figura 6.10a);
4. Diagonais comprimidas: formadas pelas bielas de compressão (concreto íntegro entre as fissuras), que colaboram na resistência e têm inclinação de  $45^\circ$  em relação ao eixo da peça.

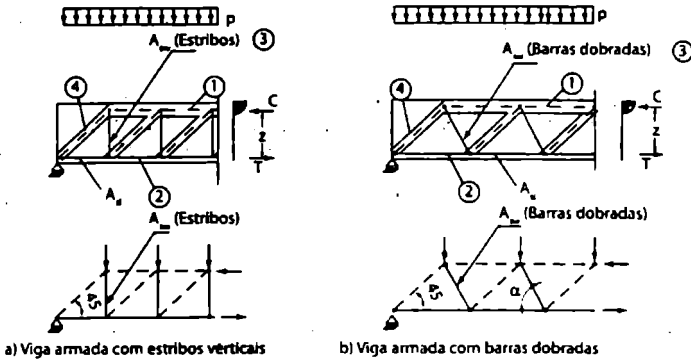


Figura 6.10 Treliça análoga de Morsch para o caso de: a) estribos; b) barras dobradas.

É lógico imaginar que a maneira de a peça resistir ao esforço cortante estará condicionada pela disposição adotada para a armadura transversal. Intuitivamente, parece que a melhor posição da armadura é a que segue a direção das tensões principais de tração; entretanto, essa disposição é muito difícil de ser executada e não permite ancorar devidamente a biela de concreto no apoio. Por essa razão, são duas as disposições mais comuns adotadas:

- a) Estribos verticais, que são independentes da armadura longitudinal de tração e compressão, apenas envolvendo-as para sua fixação, tendo geralmente um diâmetro inferior ao destas; essas armaduras servem de montantes (ou diagonais) de tração da treliça análoga;
- b) Barras dobradas, levantadas da armadura longitudinal de tração, a  $45^\circ$  em relação ao eixo da peça, a partir do ponto em que deixam de ser necessárias para resistir aos esforços de tração oriundos do momento fletor.

### 6.4.2 CÁLCULO DA ARMADURA TRANSVERSAL

Uma viga, na iminência do colapso, pode, como visto, ser representada por uma treliça, em equilíbrio, com as forças internas e externas representadas na Figura 6.11. Para o cálculo das forças nas barras da treliça, e conseqüentemente das expressões que possibilitam determinar a quantidade de armadura, devem ser feitas as seguintes hipóteses:

- a) a treliça é isostática;
- b) os banzos são paralelos;
- c) a inclinação das fissuras, e portanto das bielas comprimidas, é de  $45^\circ$ ;
- d) a inclinação ( $\alpha$ ) da armadura transversal pode variar entre  $45^\circ$  e  $90^\circ$ .

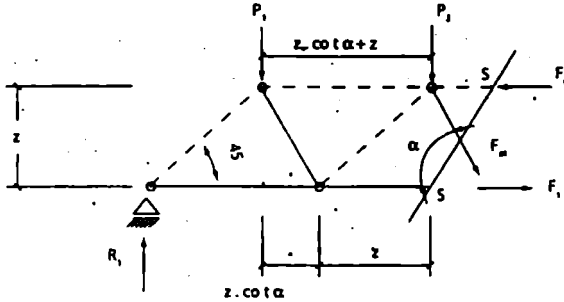


Figura 6.11 Treliça de Mörsch com esforços atuantes e internos em uma seção S.

- Equilíbrio das forças externas e internas atuantes na treliça (Figura 6.11), em que:

$P_1$  e  $P_2$  – forças externas aplicadas aos nós;

$R_1$  – reação de apoio;

$F_c$  – resultante das tensões no concreto do banzo comprimido;

$F_m$  – resultante das tensões nas barras da armadura transversal que cortam uma fissura;

$F_1$  – resultante das tensões na armadura longitudinal de tração.

- Equilíbrio das componentes verticais:  $R_1 - P_1 - P_2 = F_m \cdot \text{sen} \alpha$
- Força cortante sollicitante na seção S:  $V_s = R_1 - P_1 - P_2$

Dessas equações resulta:

$$F_m \cdot \text{sen} \alpha = V_s \quad (6.10)$$

Mas, na ruptura,

$$F_m = A_{m\text{tr}} \cdot n \cdot f_{yd} \quad (6.11)$$

sendo:

- $A_w$  – área da seção transversal de uma barra da armadura de cisalhamento;
- $n$  – número de barras que cruzam uma fissura;
- $f_{yd}$  – resistência de cálculo do aço à tração.

Também na ruptura, a força cortante que atua é a solicitante de cálculo  $V_{sd}$  ( $V_{sd} = 1,4 \cdot V_e$ ), que levada à equação 6.10 resulta:

$$F_w \cdot \text{sen} \alpha = V_{sd} \rightarrow F_w = \frac{V_{sd}}{\text{sen} \alpha} \quad (6.12)$$

Das equações 6.11 e 6.12, obtém-se:

$$A_w \cdot n \cdot f_{yd} = \frac{V_{sd}}{\text{sen} \alpha} \quad (6.13)$$

O número de barras ( $n$ ) que cruzam uma fissura, sendo  $s$  seu espaçamento (Figura 6.12), é dado por:

$$n = \frac{z + z \cdot \cot \alpha}{s} = \frac{z \cdot (1 + \cot \alpha)}{s} \quad (6.14)$$

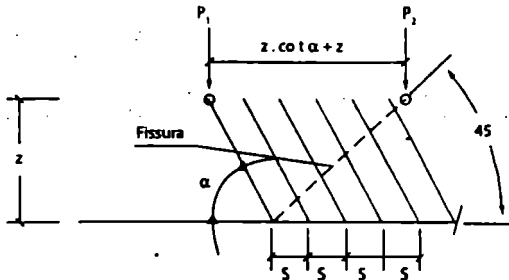


Figura 6.12 Barras que cruzam uma fissura.

Colocando o valor de  $n$  na equação 6.13, tem-se:

$$A_w \cdot \frac{z \cdot (1 + \cot \alpha)}{s} \cdot f_{yd} = \frac{V_{sd}}{\text{sen} \alpha} \quad (6.15)$$

$$\frac{A_w}{s} = \frac{V_{sd}}{\text{sen} \alpha} \cdot \frac{1}{f_{yd} \cdot z \cdot (1 + \cot \alpha)} \quad (6.16)$$

Como é mais conveniente trabalhar com valores adimensionais, define-se agora uma porcentagem volumétrica de armadura  $\rho_{v,w}$ , observando que  $d = \ell \cdot \text{sen} \alpha$  (Figura 6.13):

$$\rho_{w,\alpha} = \frac{\text{volume de aço}}{\text{volume de concreto}} = \frac{\ell \cdot A_{wv}}{b_w \cdot d \cdot s} = \frac{\ell \cdot A_{wv}}{b_w \cdot s \cdot \ell \cdot \text{sen} \alpha} = \frac{A_{wv}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen} \alpha} \quad (6.17)$$

Verifica-se que a porcentagem volumétrica é numericamente igual à porcentagem geométrica. Para usar esse resultado na expressão 6.16, dividem-se os dois membros dessa equação por  $(b_w \cdot \text{sen} \alpha)$ , obtendo-se a correlação entre a área de armadura transversal e o esforço interno devido à força cortante de cálculo:

$$\frac{A_{wv}}{s \cdot b_w \cdot \text{sen} \alpha} = \frac{V_{Sd}}{b_w \cdot z} \cdot \frac{1}{f_{yd} \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \alpha \cdot (1 + \cot \alpha)} \quad (6.18)$$

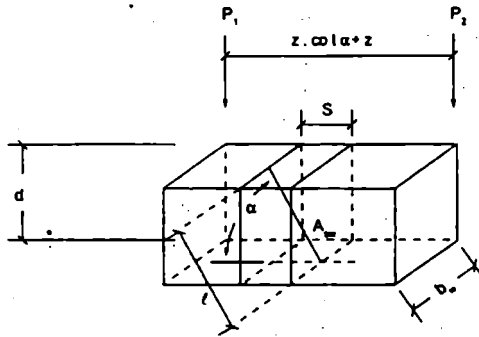


Figura 6.13  $A_{wv}$  em um trecho  $s$  da peça.

Supondo que o braço de alavanca  $z$  possa ser tomado aproximadamente igual a  $z = d/1,10$ , usando a definição de porcentagem volumétrica dada pela equação 6.17 e verificando que  $\text{sen} \alpha \cdot (1 + \cot \alpha) = (\text{sen} \alpha + \cos \alpha)$ , a expressão 6.18 fica:

$$\rho_{w,\alpha} = 1,10 \cdot \frac{V_{Sd}}{b_w \cdot d} \cdot \frac{1}{f_{yd} \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha)} \quad (6.19)$$

Chamando  $\frac{V_{Sd}}{b_w \cdot d} = \tau_{Sd}$  (tensão convencional solitante de cisalhamento, de cálculo, na alma da peça), tem-se finalmente:

$$\rho_{w,\alpha} = \frac{1,10 \cdot \tau_{Sd}}{f_{yd}} \cdot \frac{1}{\text{sen} \alpha \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha)} \quad (6.20)$$

Conhecendo a seção de uma viga ( $b_w, d$ ), a força cortante máxima e o tipo de aço a ser empregado ( $f_{yd}$ ), as expressões 6.17 e 6.20 possibilitam calcular, para uma área  $A_{wv}$  de armadura transversal predefinida, seu espaçamento  $s$  necessário ou vice-versa.

A partir da equação 6.18, com  $z = d/1,10$ , calcula-se diretamente o valor do espaçamento  $s$ :

$$s = \frac{A_{sv} \cdot d \cdot f_{yd} \cdot (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha)}{1,10 \cdot V_{Sd}} \quad (6.21)$$

No caso mais usual, em que são empregados estribos verticais, o ângulo de inclinação da armadura é  $\alpha = 90^\circ$ , e as equações 6.17, 6.20 e 6.21 ficam bastante simples, reduzindo-se a:

$$\rho_{sv,90} = \frac{A_{sv}}{b_w \cdot s} \quad (6.22)$$

$$\rho_{sv,90} = \frac{1,10 \cdot \tau_{Sd}}{f_{yd}} \quad (6.23)$$

$$s = \frac{A_{sv} \cdot d \cdot f_{yd}}{1,10 \cdot V_{Sd}} \quad (6.24)$$

É oportuno destacar que os resultados aqui encontrados, pelo modelo de treliça, complementam a teoria de flexão vista no capítulo 3.

Uma vez obtidas as expressões que permitem calcular a quantidade de armadura transversal necessária para resistir ao esforço cortante, surge a pergunta natural: em uma viga de seção retangular, de dimensões  $b_w$  e  $d$ , em que atua uma força cortante  $V_{Sd}$ , e para o mesmo tipo de aço, é mais econômico utilizar estribos verticais ou armadura inclinada a  $45^\circ$ ? (o custo da mão de obra utilizada para executar o serviço não será computado). Para responder, basta calcular, em cada caso (barras a  $90^\circ$  e  $45^\circ$ ), qual é a porcentagem de armadura necessária.

- Para  $\alpha = 90^\circ$ , a porcentagem de armadura é dada pela equação 6.23:

$$\rho_{sv,90} = \frac{1,10 \cdot \tau_{Sd}}{f_{yd}}$$

- Para  $\alpha = 45^\circ$ , a porcentagem de armadura pode ser calculada pela equação 6.20:

$$\rho_{sv,45} = \frac{1,10 \cdot \tau_{Sd}}{f_{yd}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} 45 \cdot (\operatorname{sen} 45 + \operatorname{cos} 45)} = \frac{1,10 \cdot \tau_{Sd}}{f_{yd}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = \frac{1,10 \cdot \tau_{Sd}}{f_{yd}}$$

Assim, conclui-se, sendo a taxa de armadura igual em cada caso, que o volume de aço é o mesmo nos dois casos, e, portanto, o custo é igual; entretanto, deve-se considerar que:

Barras dobradas:

- A execução é mais difícil;
- Devem ser sempre utilizadas junto com estribos e só podem resistir no máximo a 60% do esforço cortante (ABNT NBR 6118:2014, item 17.4.1.1.3 e seção 6.8.3 deste capítulo);
- Como são executadas a partir da armadura longitudinal, têm bitola maior que os estribos, e o controle da fissuração fica prejudicado;
- A ancoragem das bielas de concreto da treliça, junto à região tracionada, é deficiente;
- Havendo apenas barras dobradas, há um efeito de "fendilhamento" do concreto junto à ancoragem da biela (Figura 6.14).

Estribos verticais (alguns tipos são mostrados na Figura 6.15):

- Apresentam maior facilidade de execução e montagem;
- Podem ser mais bem distribuídos (elementos independentes) e podem ter diâmetro menor que as barras longitudinais, favorecendo a aderência e fissuração;
- Auxiliam na montagem da armadura longitudinal;
- Podem resistir sozinhos a todo o esforço cortante;
- Auxiliam na distribuição de tensões de tração que se produzem pela transmissão de esforços entre concreto e aço.

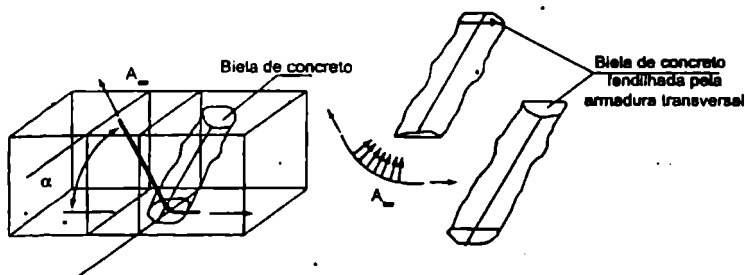


Figura 6.14 Efeito de fendilhamento que pode ser provocado pela armadura transversal inclinada na biela de compressão de concreto.

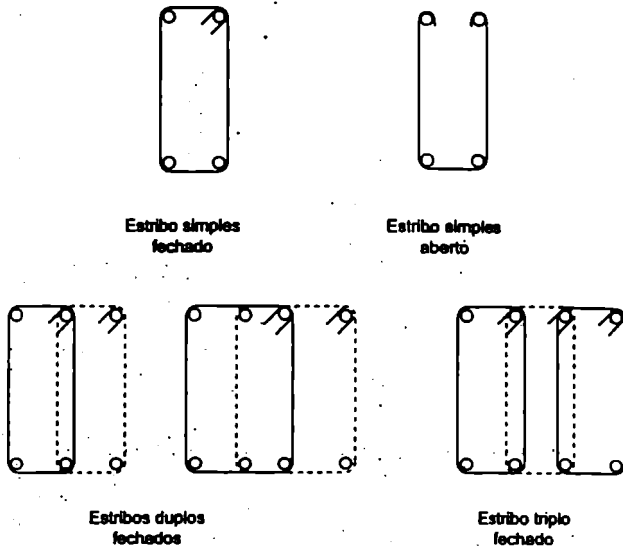


Figura 6.15 Principais tipos de estribos.

### EXEMPLO 1

Calcular o espaçamento  $s$  de estribos simples necessários em uma viga de seção retangular submetida a um esforço cortante  $V_s = 1300$  kN.

Dados:  $b_w = 70$  cm;  $d = 200$  cm;  $f_{ct} = 26$  MPa; aço CA50 (500 MPa ou 50 kN/cm<sup>2</sup>).

O exercício pode ser resolvido diretamente pela expressão 6.24, percebendo-se que para o cálculo do espaçamento é preciso, primeiramente, escolher um diâmetro para a armadura transversal. Adotando um diâmetro  $\phi = 12,5$  mm (1,25 cm<sup>2</sup>) e destacando que em um estribo simples duas barras cruzam uma fissura, tem-se:

$$s = \frac{A_{sv} \cdot d \cdot f_{yd}}{1,10 \cdot V_{sd}} = \frac{2 \cdot 1,25 \cdot 200 \cdot 50}{1,10 \cdot 1,15 \cdot 1,4 \cdot 1300} = 10,9 \text{ cm}$$

Assim, adotado um valor para o diâmetro da armadura, verifica-se se o espaçamento necessário de estribos é razoável; caso contrário, deve-se aumentá-lo ou até mesmo fazer uso de estribos compostos (duplos ou triplos como os indicados na Figura 6.15).

Dessa forma, no exemplo, podem-se usar estribos simples de  $\phi = 12,5$  mm a cada 10 cm ou estribos duplos de  $\phi = 12,5$  mm a cada 20 cm.

## 6.5 VERIFICAÇÃO DAS BIELAS DE CONCRETO COMPRIMIDAS

Na seção anterior foram apresentados os princípios que possibilitam o cálculo da armadura transversal, de modo que ela resista com segurança às tensões tangenciais. É necessário, também, verificar se o concreto comprimido das bielas não será esmagado, ou seja, se a tensão atuante não será maior que a capacidade resistente do concreto à compressão. A verificação do concreto do banzo comprimido da treliça já foi vista no capítulo 3.

O roteiro que será apresentado baseia-se no efetuado por Montoya et al.,<sup>34</sup> em que serão calculadas as tensões de compressão nas bielas, que posteriormente deverão ser comparadas com os valores máximos estabelecidos pela ABNT NBR 6118:2014.

### 6.5.1 CÁLCULO DAS TENSÕES DE COMPRESSÃO $\sigma_c$ NAS BIELAS DE CONCRETO

As tensões normais de compressão em uma biela podem ser obtidas, de maneira aproximada, fazendo-se o equilíbrio das forças atuantes em uma seção que corta um conjunto de bielas. O modelo desenvolvido por Montoya et al. é útil para se ter uma ideia do comportamento das tensões de compressão nas bielas de uma viga fletida e de onde surgiram alguns dos valores limites especificados pelas normas. Valores mais confiáveis só são possíveis de se obter por meio de análises experimentais.

Seja uma viga, na ruptura, seccionada por um plano com inclinação  $\alpha$ , na direção da armadura transversal, e com as bielas inclinadas de um ângulo  $\beta$  como a mostrada na Figura 6.16. A partir dos elementos conhecidos, relaciona-se o valor do esforço cortante na seção transversal com o da tensão normal de compressão nas bielas de concreto.

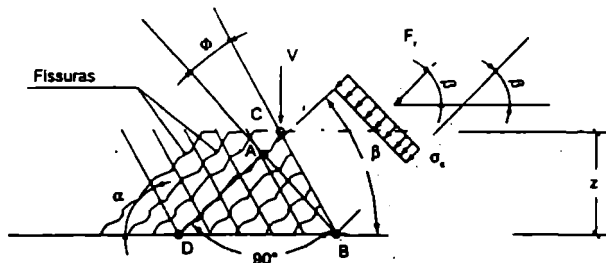


Figura 6.16 Tensões de compressão nas bielas de concreto em uma viga fletida.

Os principais passos para a obtenção da expressão que fornece a tensão de compressão em uma biela, cuja seção é  $AB \times b_s$ , são:

- comprimento da seção BC que tem a direção dos estribos:

$$BC \cdot \text{sen} \alpha = z \rightarrow BC = z / \text{sen} \alpha$$

34 Montoya et al. (1991).

- projetando BC sobre AB, normal à direção das bielas, encontra-se AB:

$$BC \cdot \cos\Phi = AB \Rightarrow AB = (z/\text{sen}\alpha) \cdot \cos\Phi$$

$$\Delta ABD: (\alpha - \Phi) + \beta = 90 \Rightarrow \Phi = \alpha + \beta - 90$$

Substituindo  $\Phi$  em AB, resulta:

$$AB = \frac{z}{\text{sen}\alpha} \cdot \cos(\alpha + \beta - 90) = \frac{z}{\text{sen}\alpha} \cdot \cos[\alpha - (90 - \beta)]$$

$$AB = \frac{z}{\text{sen}\alpha} \cdot [\cos\alpha \cdot \cos(90 - \beta) + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}(90 - \beta)] = z \cdot \left( \frac{\cos\alpha \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}\alpha} + \frac{\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta}{\text{sen}\alpha} \right)$$

$$AB = z \cdot \text{sen}\beta \cdot (\cot\alpha + \cot\beta) \quad (6.25)$$

- força resultante interna de compressão nas bielas (tensão  $\sigma_c$  vezes a área):

$$F_r = \sigma_c \cdot (AB) \cdot b_w$$

- na ruptura a projeção vertical de  $F_r$  é a força cortante  $V_{sd}$  atuante na seção:

$$V_{sd} = F_r \cdot \text{sen}\beta = \sigma_c \cdot b_w \cdot (AB) \cdot \text{sen}\beta$$

- conhecida a força cortante  $V_{sd}$  na seção, determina-se  $\sigma_c$ :

$$\sigma_c = \frac{V_{sd}}{b_w \cdot (AB) \cdot \text{sen}\beta}$$

Substituindo AB dado pela equação 6.19:

$$\sigma_c = \frac{V_{sd}}{b_w \cdot z \cdot \text{sen}\beta \cdot (\cot\alpha + \cot\beta) \cdot \text{sen}\beta}$$

$$\sigma_c = \frac{V_{sd}}{b_w \cdot z} \cdot \frac{1}{\text{sen}^2\beta \cdot (\cot\alpha + \cot\beta)} \quad (6.26)$$

a tensão tangencial máxima de referência na flexão é (equação 6.6)  $\tau_{\text{máx}} = V_{sd}/(b_w \cdot z)$ , e então:

$$\sigma_c = \frac{\tau_{\text{máx}}}{\text{sen}^2\beta \cdot (\cot\alpha + \cot\beta)} \quad (6.27)$$

- fazendo  $z = d/1,10$  na equação 6.26, resulta  $= \tau_{sd}$ :

$$\sigma_c = 1,10 \cdot \frac{V_{sd}}{b_w \cdot d} \cdot \frac{1}{\text{sen}^2 \beta \cdot (\cot \alpha + \cot \beta)}$$

- finalmente, lembrando que  $V_{sd}/(b_w \cdot d) = \tau_{sd}$ :

$$\sigma_c = \frac{1,10 \cdot \tau_{sd}}{\text{sen}^2 \beta \cdot (\cot \alpha + \cot \beta)} \quad (6.28)$$

A partir da expressão 6.27, podem ser calculadas as tensões de compressão  $\sigma_c$  no concreto, quando se utilizam estribos ( $\alpha = 90^\circ$ ) ou barras dobradas ( $\alpha = 45^\circ$ ), e a inclinação das bielas  $\beta = 45^\circ$  e  $\beta = 30^\circ$ , resultando nos valores do Quadro 6.2.

**Quadro 6.2** Valores de tensão normal na biela de concreto em diversas situações.

Armadura transversal	$\alpha$	$\beta = 45^\circ$	$\beta = 30^\circ$
Estribos	$90^\circ$	$\sigma_c = 2 \cdot \tau_{\text{máx}}$	$\sigma_c = 2,31 \cdot \tau_{\text{máx}}$
Barras dobradas	$45^\circ$	$\sigma_c = \tau_{\text{máx}}$	$\sigma_c = 1,47 \cdot \tau_{\text{máx}}$

### 6.5.2 VALORES LIMITES DAS TENSÕES DE COMPRESSÃO NAS BIELAS

Inicialmente, é preciso notar que a teoria clássica da treliça indica fissuras inclinadas de  $45^\circ$ , e, com essa inclinação, as tensões principais de compressão, como foi visto, valem  $\sigma_1 = \sigma_c = \tau_{\text{máx}}$ , o que só ocorre, conforme o Quadro 6.2, no caso de armadura de cisalhamento a  $45^\circ$  e quando se admitem fissuras também a  $45^\circ$ .

Outra observação importante é que, com estribos, a tensão atuante nas bielas é maior que com barras dobradas, e que se a inclinação adotada para as fissuras for menor que  $45^\circ$ , por exemplo  $30^\circ$ , essas tensões também serão maiores.

As tensões de compressão nas bielas não devem causar esmagamento do concreto, e para isso as tensões de cisalhamento atuantes na viga devem ser limitadas a determinados valores, de modo que a segurança da viga não fique comprometida.

Para se ter uma ideia dos limites impostos às tensões, supondo um coeficiente de segurança igual a 2, resulta, para o caso de estribos e inclinação das fissuras de  $45^\circ$ , a seguinte tensão de cisalhamento limite, ou última (máxima tensão que o carregamento externo da viga pode causar em qualquer seção):

$$\sigma_{c,u} = \frac{f_{cd}}{2} \text{ e, do quadro, } \sigma_{c,u} = 2 \cdot \tau_u$$

$$\therefore 2 \cdot \tau_u = \frac{f_{cd}}{2} \rightarrow \tau_u = \frac{f_{cd}}{4} = 0,25 \cdot f_{cd}$$

Esses limites são fornecidos pelas normas com base, principalmente, em resultados experimentais, mas o procedimento mostrado serve para se ter uma ideia do que ocorre. Os limites apresentados pela ABNT NBR 6118:2014 serão vistos a seguir, junto com os dois modelos de verificação do estado limite último devido à força cortante em elementos lineares.

## 6.6 TRELIÇA GENERALIZADA DE MÖRSCH

Com o desenvolvimento e crescimento das pesquisas experimentais, verificou-se que o cálculo por meio da treliça de Morsch conduz a uma armadura transversal exagerada, ou seja, a tensão real atuante na armadura é menor que a obtida pelo modelo de treliça. Essa diferença pode ser atribuída principalmente aos seguintes fatores:

- A treliça é hiperestática (os nós não podem ser considerados como articulações perfeitas);
- Nas regiões mais solicitadas pela força cortante, a inclinação das fissuras, e, portanto, das bielas, é menor que os  $45^\circ$  admitidos por Morsch;
- Parte do esforço cortante é absorvido na zona de concreto comprimido (devido à flexão);
- Os banzos não são paralelos (o banzo superior – comprimido – é inclinado);
- As bielas de concreto estão parcialmente engastadas na ligação com o banzo comprimido, e, assim, são submetidas à flexocompressão, aliviando os montantes ou diagonais tracionados;
- As bielas são mais rígidas que os montantes ou diagonais tracionados, e absorvem uma parcela maior do esforço cortante do que aquela determinada pela treliça clássica;
- A quantidade (taxa) de armadura longitudinal influi no esforço da armadura transversal.

Todos esses fatores fazem com que a tensão na armadura transversal seja menor que as obtidas com o esquema da teoria clássica de Morsch, e isso deve ser considerado no seu dimensionamento. Entretanto, é fácil perceber que introduzi-los todos no cálculo da treliça levaria a dificuldades matemáticas consideráveis, e então a solução foi adotar modelos simplificados, mantendo os princípios do modelo de treliça, mas também com base em resultados de ensaios, resultando no que se chama de *treliça generalizada de Morsch*.

Com base na ABNT NBR 6118:1980, a correção podia ser feita introduzindo, nas expressões anteriores, um fator corretivo obtido a partir da contribuição do concreto na resistência ao cisalhamento. Na ABNT NBR 6118:2014, são apresentados dois modelos de cálculo, dependendo da inclinação que se adote para as diagonais de compressão

(bielas comprimidas), e que englobam o cálculo da armadura transversal e a verificação das tensões de compressão nas bielas.

## 6.7 ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE ELEMENTOS LINEARES SOB FORÇA CORTANTE (ABNT NBR 6118:2014)

Serão apresentados a seguir o cálculo da armadura transversal e a verificação das tensões nas bielas comprimidas, em elementos lineares sujeitos à força cortante, de acordo com as hipóteses e os modelos apresentados pela ABNT NBR 6118:2014, item 17.4.

### 6.7.1 HIPÓTESES BÁSICAS

As prescrições da norma se aplicam a elementos lineares armados ou protendidos, submetidos a forças cortantes; eventualmente combinadas com outros esforços sollicitantes. Não se aplicam a elementos de volume, lajes, vigas paredes e consolos curtos.

As condições de cálculo, para elementos lineares, admitem dois modelos que se baseiam na analogia com modelo em treliça, de banzos paralelos, associado a mecanismos resistentes complementares (treliça generalizada) desenvolvidos no interior do elemento estrutural e que absorvem uma parcela  $V_c$  (ou  $\tau_c$  em termos de tensão) da força cortante. Esses mecanismos correspondem ao engrenamento que ocorre entre as partes de concreto separadas pelas fissuras inclinadas e a resistência da armadura longitudinal que serve de apoio às bielas de concreto (efeito de pino).

O ângulo de inclinação  $\alpha$  das armaduras transversais (item 17.4.1.1.5 da norma) em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural deve estar situado no intervalo  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ .

### 6.7.2 VERIFICAÇÃO DO ESTADO LIMITE ÚLTIMO

A resistência da peça, em uma determinada seção transversal, será satisfatória quando forem verificadas simultaneamente as seguintes condições (item 17.2.4.1 da ABNT NBR 6118:2014):

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \quad (6.29)$$

$$V_{Sd} \leq V_{Rd1} = V_c + V_{sw} \quad (6.30)$$

em que:

$V_{Sd}$  – força cortante sollicitante de cálculo na seção;

$V_{Rd2}$  – força cortante resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto, de acordo com os modelos de cálculo I ou II;

$V_{Rd1} = V_c + V_{sw}$  é a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína por tração diagonal;

$V_c$  – parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça;

$V_{sw}$  – parcela de força cortante resistida pela armadura transversal, de acordo com os modelos I ou II.

Na região dos apoios, os cálculos devem considerar as forças cortantes agentes nas faces dos mesmos, considerando as reduções prescritas no item 17.4.1.2.1 da norma para cargas próximas aos apoios, apresentadas neste capítulo na seção 6.8.5.

As expressões anteriores possibilitam verificar, conhecida a taxa de armadura transversal, se o esforço em uma seção será ou não inferior ao permitido pela norma ou ao necessário para o funcionamento com segurança. Assim, bastará considerar, nas expressões anteriores, o sinal de igualdade para determinar, por exemplo, a armadura transversal em uma determinada seção. Essas verificações podem ser escritas, também, em termos de tensões.

### 6.7.2.1 Modelo de cálculo I

O modelo I (objeto do item 17.4.2.2 da norma) admite que as diagonais de compressão são inclinadas de  $\theta = 45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, e admite ainda que a parcela complementar  $V_c$  tem valor constante, independente de  $V_{sd}$ . Nesse modelo, a resistência da peça é assegurada por:

a) Verificação das tensões de compressão nas bielas (compressão diagonal do concreto):

$$V_{sd} \leq V_{Rd2,I} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \quad (6.31)$$

com  $\alpha_{v2} = (1 - f_{ck}/250)$ , sendo  $f_{ck}$  em MPa, e  $V_{Rd2,I}$  a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas no modelo I.

Essa verificação pode ser feita em função das tensões tangenciais solicitante de cálculo e resistente (última), dividindo as forças cortantes da equação 6.29 por  $b_w \cdot d$  e com  $V_{Rd2,I}$  de acordo com a equação 6.31:

$$\frac{V_{sd}}{b_w \cdot d} \leq \frac{V_{Rd2,I}}{b_w \cdot d} \Rightarrow \tau_{sd} \leq \tau_{Rd2,I} = \frac{0,27 \cdot (1 - f_{ck}/250) \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d}{b_w \cdot d}$$

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd2,I} = 0,27 \cdot (1 - f_{ck}/250) \cdot f_{cd} \text{ (MPa)} \quad (6.32)$$

b) Cálculo da armadura transversal

Para o cálculo da armadura transversal, a parcela da força cortante ( $V_{sw}$ ) a ser absorvida pela armadura, a partir da equação 6.30, pode ser escrita por:

$$V_{sw} = V_{Rd3} - V_c \quad (6.33)$$

sendo que a força cortante resistente de cálculo  $V_{Rd3}$  deve ser, no mínimo, igual à força cortante sollicitante de cálculo  $V_{Sd}$  ( $V_{Rd3} = V_{Sd}$ ), e, assim:

$$V_{sw} = V_{Sd} - V_c \quad (6.34)$$

Portanto, a parcela da força cortante a ser resistida por armadura transversal é a diferença entre a força cortante sollicitante de cálculo e a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça, ou seja, a parcela resistida pelo concreto íntegro entre as fissuras. O valor de  $V_c$  é obtido para diversas situações de sollicitações; no caso de flexão simples e flexotração com a linha neutra cortando a seção, vale:

$$V_c = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \quad (6.35)$$

em que:

$$f_{ctd} = \frac{f_{ct,inf}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot f_{ct,m}}{\gamma_c} = \frac{0,7 \cdot 0,3}{1,4} \cdot f_{ct}^{2/3} = 0,15 \cdot f_{ct}^{2/3} \quad (\text{valor de cálculo da resis-}$$

tência à tração do concreto);

$d$  – altura útil da seção, igual à distância da borda comprimida ao centro de gravidade da armadura de tração;

$b_w$  – menor largura da seção, compreendida ao longo da altura útil  $d$ .

A força cortante resistida pela armadura transversal em uma certa seção é expressa por:

$$V_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen} \alpha + \text{cos} \alpha) \quad (6.36)$$

em que:

$s$  – espaçamento entre elementos da armadura transversal  $A_{sw}$ , medido segundo o eixo longitudinal da peça;

$f_{ywd}$  – tensão na armadura transversal passiva, limitada ao valor  $f_{yd}$  no caso de estribos e a 70% desse valor no caso de barras dobradas, não se tomando, para ambos os casos, valores superiores a 435 MPa;

$\alpha$  – ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, podendo-se tomar  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ .

No caso de estribos verticais, que é o usualmente empregado, a equação 6.36 torna-se:

$$V_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \quad (6.37)$$

As expressões 6.34, 6.36 e 6.37 podem ser escritas em termos de tensões e taxa de armadura transversal. Dividindo ambos os membros da equação 6.34 por  $b_w \cdot d$ , resulta:

$$\frac{V_{sw}}{b_w \cdot d} = \frac{V_{Sd}}{b_w \cdot d} - \frac{V_c}{b_w \cdot d} \Rightarrow \tau_{sw} = \tau_{Sd} - \tau_c \quad (6.38)$$

A expressão 6.36 pode ser colocada em função da taxa de armadura transversal  $\rho_{sw,\alpha}$  (ver equação 6.17), dividindo os dois termos por  $(b_w \cdot d \cdot \text{sen}\alpha)$ :

$$\frac{V_{sw}}{b_w \cdot d \cdot \text{sen}\alpha} = \left( \frac{A_{sw}}{b_w \cdot d \cdot \text{sen}\alpha \cdot s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)$$

$$\frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen}\alpha} = \frac{V_{sw}}{b_w \cdot d \cdot \text{sen}\alpha \cdot s} \cdot \frac{1}{0,9 \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)}$$

Como  $\frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen}\alpha} = \rho_{sw,\alpha}$  e  $\frac{V_{sw}}{b_w \cdot d} = \tau_{sw}$ , resulta:

$$\rho_{sw,\alpha} = \tau_{sw} \cdot \frac{1}{0,9 \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen}\alpha \cdot (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} \cdot \frac{1}{\text{sen}\alpha \cdot (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)} \quad (6.39)$$

que é praticamente a expressão 6.20 já deduzida, destacando que, naquela, toda a tensão de cisalhamento oriunda da força cortante solicitante de cálculo ( $\tau_{Sd}$ ) deveria ser resistida pela armadura transversal (treliça de Morsch), e aqui a tensão a ser combatida pela armadura é  $\tau_{sw}$  ( $\tau_{sw} = \tau_{Sd} - \tau_c$ ), referente à treliça generalizada. No caso de estribos verticais, resulta:

$$\rho_{sw,90} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} \quad (6.40)$$

c) Força cortante resistida para uma determinada quantidade de armadura transversal. Conhecida a quantidade de armadura transversal em uma viga (área  $A_{sw}$  e espaçamento  $s$ ) e a resistência característica do concreto à compressão, é possível encontrar a força cortante resistida pela viga. Das equações 6.34 e 6.36 é possível escrever, trocando  $V_{Sd}$  por  $V_{Rd}$ :

$$V_{Rd} - V_c = V_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)$$

$$V_{Rd} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha) + V_c$$

Com  $V_c = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d$ , conforme equação 6.35, e dividindo os dois termos da equação acima por  $(b_w \cdot d \cdot \text{sen} \alpha)$ , tem-se:

$$\frac{V_{Rd}}{b_w \cdot d \cdot \text{sen} \alpha} = \left( \frac{A_{sw}}{b_w \cdot d \cdot s \cdot \text{sen} \alpha} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha) + \frac{0,6 \cdot f_{ctd}}{\text{sen} \alpha}$$

Como  $\frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen} \alpha} = \rho_{sw,\alpha}$ :

$$\frac{V_{Rd}}{b_w \cdot d \cdot \text{sen} \alpha} = \rho_{sw,\alpha} \cdot 0,9 \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha) + \frac{0,6 \cdot f_{ctd}}{\text{sen} \alpha}$$

A força cortante resistente é encontrada dividindo a de cálculo pelo coeficiente 1,4:

$$V_R = \left[ \rho_{sw,\alpha} \cdot 0,9 \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha) + \frac{0,6 \cdot f_{ctd}}{\text{sen} \alpha} \right] \cdot \frac{b_w \cdot d \cdot \text{sen} \alpha}{1,4}$$

$$V_R = \frac{\rho_{sw,\alpha} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha) + 1,11 \cdot 0,6 \cdot f_{ctd}}{1,11 \cdot 1,4} \cdot b_w \cdot d$$

Colocando  $f_{ctd} = 0,15 \cdot f_{ck}^{2/3}$ , tem-se:

$$V_R = 0,644 \cdot b_w \cdot d \cdot \left[ \rho_{sw,\alpha} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha) + 0,10 \cdot f_{ck}^{2/3} \right] \quad (6.41)$$

Para  $f_{ywd}$  e  $f_{ck}$  em MPa,  $b_w$  e  $d$  em metros, resulta, finalmente, para  $V_R$  em kN:

$$V_R = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot \left[ \rho_{sw,\alpha} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha) + 0,10 \cdot f_{ck}^{2/3} \right] \quad (6.42)$$

e para estribos verticais:

$$V_R = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot \left[ \rho_{sw,90} \cdot f_{ywd} + 0,10 \cdot f_{ck}^{2/3} \right] \quad (6.43)$$

## Exemplo 2

Calcular, usando o modelo de cálculo I da ABNT NBR 6118:2014, o espaçamento de estribos simples (2 ramos) verticais ( $\alpha = 90^\circ$ ) necessário para os dados do exemplo 1 (V

$= 1300 \text{ kN}$ ;  $b_w = 70 \text{ cm}$ ;  $d = 200 \text{ cm}$ ; aço CA50;  $\phi = 12,5 \text{ mm}$  para armadura transversal;  $f_{ck} = 26 \text{ MPa} = 26000 \text{ kN/m}^2$ .

a) Verificação do esmagamento da biela de concreto

$V_{Sd} = 1,4 \cdot V = 1,4 \cdot 1300 = 1820 \text{ kN}$  é a força cortante solicitante de cálculo.

$$V_{Rd2,1} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d = 0,27 \cdot 0,896 \cdot \frac{26000}{1,4} \cdot 0,7 \cdot 2 = 6289,9 \text{ kN (equação$$

6.31), com  $\alpha_{v2} = (1 - f_{ck}/250) = (1 - 26/250) = 0,896$  ( $f_{ck}$  em MPa).

Portanto,  $V_{Sd} \leq V_{Rd2,1}$  e não há perigo de esmagamento do concreto das bielas.

b) Cálculo da armadura transversal (estribos verticais simples,  $\phi = 12,5 \text{ mm}$ )

- Força cortante solicitante de cálculo:

$$V_{Sd} = 1,4 \cdot V = 1,4 \cdot 1300 = 1820 \text{ kN}$$

- Força cortante ( $V_c$ ) absorvida por mecanismos complementares ao de treliça (equação 6.35):

$$V_c = 0,6 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d = 0,6 \cdot 1320 \cdot 0,7 \cdot 2 = 1108,8 \text{ kN}$$

$$\text{com } f_{cd} = \frac{f_{ck,inf}}{\gamma_c} = 0,15 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0,15 \cdot \sqrt[3]{26^2} = 0,15 \cdot 8,78 = 1,32 \text{ MPa} = 1320 \text{ kN/m}^2$$

- Parcela de força cortante resistida pela armadura transversal (equação 6.34):

$$V_{sw} = V_{Sd} - V_c = 1820 - 1108,8 = 711,2 \text{ kN}$$

- Espaçamento  $s$  dos estribos verticais ( $\alpha = 90^\circ$ ) de  $\phi = 12,5 \text{ mm}$  (equação 6.37):

$$V_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd}$$

$$711,2 = \left( \frac{2 \cdot 1,25}{s} \right) \cdot 0,29 \cdot 200 \cdot \frac{50}{1,15} \Rightarrow s = 27,50 \text{ cm}$$

O espaçamento encontrado deverá ainda respeitar a quantidade e o espaçamento mínimos definidos pela norma, conforme ainda será visto. Verifica-se que a armadura

necessária caiu significativamente quando se considerou a treliça generalizada, demonstrando que a contribuição do concreto não deve ser de maneira alguma desprezada.

Se a força cortante  $V_{sw}$  for negativa, significa que apenas o concreto é suficiente para resistir aos esforços de cisalhamento e, portanto, a armadura transversal será apenas construtiva, obedecendo aos valores mínimos indicados pela norma.

### Exemplo 3

Exemplo anterior em termos de tensões e taxa de armadura transversal (mesmos dados).

a) Verificação do esmagamento da biela de concreto

$$\tau_{sd} = \frac{V_{sd}}{b_w \cdot d} = \frac{1,4 \cdot 1300}{0,70 \cdot 2,0} = 1300 \text{ kN/m}^2 = 1,30 \text{ MPa}$$

$$\tau_{Rd2,1} = 0,27 \cdot (1 - f_{ck} / 250) \cdot f_{ctd} = 0,27 \cdot (1 - 26 / 250) \cdot \frac{2600}{1,4} = 4493 \text{ kN/m}^2 = 4,49 \text{ MPa}$$

Portanto,  $\tau_{sd} \leq \tau_{Rd2,1}$ , e não há perigo de esmagamento do concreto das bielas.

b) Cálculo da armadura transversal (estribos verticais simples)

- Tensão tangencial solicitante de cálculo:

$$\tau_{sd} = 1300 \text{ kN/m}^2 = 1,30 \text{ MPa}$$

- Tensão, devida ao concreto, absorvida por mecanismos complementares ao de treliça:

$$\tau_c = \frac{V_c}{b_w \cdot d} = \frac{0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d}{b_w \cdot d} = 0,6 \cdot f_{ctd} = 0,6 \cdot 0,15 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0,09 \cdot \sqrt[3]{26^2} = 0,79 \text{ MPa}$$

- Tensão tangencial a ser resistida pela armadura transversal:

$$\tau_{sw} = \tau_{sd} - \tau_c = 1,30 - 0,79 = 0,51 \text{ MPa} = 510 \text{ kN/m}^2$$

- Taxa de armadura transversal:

$$\rho_{sw,90} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} = \frac{1,11 \cdot 0,51}{500 / 1,15} = 1,30 \cdot 10^{-3}$$

- Espaçamento dos estribos verticais ( $\alpha = 90^\circ$ ) de  $\phi = 12,5 \text{ mm}$ , calculado com a equação 6.17:

$$\rho_{sw,90} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen}\alpha} \Rightarrow s = \frac{A_{sw}}{\rho_{sw,90} \cdot b_w} = \frac{2 \cdot 1,25}{1,30 \cdot 10^{-3} \cdot 70} = 27,50 \text{ cm}$$

#### Exemplo 4

Calcular, com o modelo I da ABNT NBR 6118:2014, a armadura transversal (somente estribos simples verticais) da viga V101 (Figura 6.17), dos exemplos 4.1 e 5.4 dos capítulos 4 e 5, na seção junto ao apoio central. Dados: aço CA50;  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$ ; estribos de  $\phi = 6,3 \text{ mm}$  ( $0,32 \text{ cm}^2$ );  $b_w = 0,25 \text{ m}$ ;  $h = 0,90 \text{ m}$ ;  $d = 0,8 \text{ m}$ ;  $p = 51,1 \text{ kN/m}$  (carga uniforme atuante na viga);  $V_{S,max} = 255,5 \text{ kN}$  (cortante máxima junto ao pilar P5 sem a redução permitida pela norma, como ainda se verá).

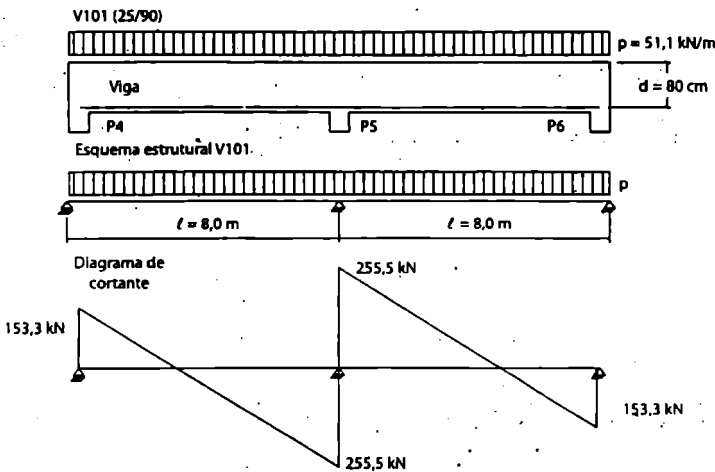


Figura 6.17 Esquema estrutural e diagrama de forças cortantes da viga V101.

a) Verificação do esmagamento da biela de concreto

$$\tau_{Sd} = \frac{V_{Sd}}{b_w \cdot d} = \frac{1,4 \cdot 255,5}{0,25 \cdot 0,80} = 1789 \text{ kN/m}^2 = 1,79 \text{ MPa}$$

$$\tau_{Rd2,1} = 0,27 \cdot (1 - f_{ck} / 250) \cdot f_{cd} = 0,27 \cdot (1 - 20 / 250) \cdot \frac{20000}{1,4} = 3549 \text{ kN/m}^2 = 3,55 \text{ MPa}$$

Portanto,  $\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd2,1}$  e não há perigo de esmagamento do concreto das bielas.

b) Espaçamento da armadura transversal (estribos verticais simples,  $\phi = 6,3 \text{ mm}$ )

$$\tau_{sd} = 1789 \text{ kN/m}^2 = 1,79 \text{ MPa}$$

$$\tau_c = \frac{V_c}{b_w \cdot d} = 0,6 \cdot f_{cd} = 0,6 \cdot 0,15 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0,09 \cdot \sqrt[3]{20^3} = 0,66 \text{ MPa}$$

$$\tau_{sv} = \tau_{sd} - \tau_c = 1,79 - 0,66 = 1,13 \text{ MPa}$$

$$\rho_{sv,90} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sv}}{f_{ywd}} = \frac{1,11 \cdot 1,13}{500/1,15} = 2,88 \cdot 10^{-3}$$

$$s = \frac{A_{sv}}{\rho_{sv,90} \cdot b_w} = \frac{2 \cdot 0,32}{2,88 \cdot 10^{-3} \cdot 25} = 8,90 \text{ cm}$$

### 6.7.2.2 Modelo de cálculo II

No modelo de cálculo II (objeto do item 17.4.2.3 da norma) é admitido que as diagonais de compressão têm inclinação  $\theta$  diferente de  $45^\circ$  em relação ao eixo do elemento estrutural, podendo ser arbitrada livremente no intervalo  $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ ; nesse caso, considera-se que a parcela complementar  $V_c$  sofra redução com o aumento  $V_{sd}$ . Nesse modelo, a resistência da peça é garantida por:

a) Verificação da compressão diagonal nas bielas de concreto

$$V_{Rd2,II} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (\text{cota} + \text{cot} \theta) \quad (6.44)$$

ou em termos de tensão:

$$\tau_{Rd2,II} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (\text{cota} + \text{cot} \theta) \quad (6.45)$$

com  $\alpha_{v2} = (1 - f_{ck}/250)$ , sendo  $f_{ck}$  em MPa.

b) Cálculo da armadura transversal

A força cortante ( $V_{sv} = V_{sd} - V_c$ ) resistida pela armadura transversal em uma certa seção é dada por:

$$V_{sv} = \left( \frac{A_{sv}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\text{cot} \alpha + \text{cot} \theta) \cdot \text{sen} \alpha \quad (6.46)$$

ou em termos da taxa de armadura transversal, como feito no modelo I:

$$\rho_{sv,s} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sv}}{f_{ywd}} \cdot \frac{1}{\text{sen} \alpha \cdot (\text{cot} \alpha + \text{cot} \theta)} \quad (6.47)$$

No caso de estribos verticais, as equações 6.46 e 6.47 tornam-se:

$$V_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot \cot \theta \quad (6.48)$$

$$\rho_{sw,90} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} \cdot \frac{1}{\cot \theta} \quad (6.49)$$

Para o valor de  $V_c$  (parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça) na flexão simples e na flexotrção com a linha neutra cortando a seção, deve ser observado:

$V_c = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d$  quando  $V_{Sd} \leq V_c$  (em termos de tensão:  $\tau_c = 0,6 \cdot f_{ctd}$  quando  $\tau_{Sd} \leq \tau_c$ );

$V_c = 0$  quando  $V_{Sd} = V_{Rd2,II}$  (em termos de tensão:  $\tau_c = 0$  quando  $\tau_{Sd} = \tau_{Rd2,II}$ ), interpolando-se linearmente para valores intermediários.

O valor da inclinação  $\theta$  da biela de concreto é bastante controverso e depende, entre diversas variáveis, do tipo de carregamento aplicado, porém, segundo a norma, deve-se considerá-lo compreendido entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$ .

### c) Força cortante resistida para determinada quantidade de armadura transversal

Da mesma maneira que no modelo I, também é possível encontrar a força cortante resistida pela viga com o modelo II, conhecidos  $A_{sw}$ ,  $s$  e  $f_{ctk}$ , a partir da equação 6.46 e com  $V_{sw} = V_{Sd} - V_c$ , trocando  $V_{Sd}$  por  $V_{Rd}$ :

$$V_{Rd} = V_{sw} + V_c = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \text{sen} \alpha + V_c$$

Dividindo os dois termos da equação acima por  $b_w \cdot d \cdot \text{sen} \alpha$ , resulta:

$$\frac{V_{Rd}}{b_w \cdot d \cdot \text{sen} \alpha} = \left( \frac{A_{sw}}{b_w \cdot d \cdot s \cdot \text{sen} \alpha} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \text{sen} \alpha + \frac{V_c}{b_w \cdot d \cdot \text{sen} \alpha}$$

Como  $\frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen} \alpha} = \rho_{sw,\alpha}$ , e fazendo  $\frac{V_c}{b_w \cdot d} = \tau_c$ , tem-se:

$$\frac{V_{Rd}}{b_w \cdot d \cdot \text{sen} \alpha} = \rho_{sw,\alpha} \cdot 0,9 \cdot f_{ywd} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \text{sen} \alpha + \frac{\tau_c}{\text{sen} \alpha}$$

A força cortante resistida é encontrada dividindo a de cálculo pelo coeficiente 1,4:

$$V_R = \left[ \rho_{sw,u} \cdot 0,9 \cdot f_{ywd} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \operatorname{sen} \alpha + \frac{\tau_c}{\operatorname{sen} \alpha} \right] \cdot \frac{b_w \cdot d \cdot \operatorname{sen} \alpha}{1,4}$$

$$V_R = \frac{\rho_{sw,u} \cdot f_{ywd} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha + 1,11 \cdot \tau_c}{1,11 \cdot 1,4} \cdot b_w \cdot d$$

$$V_R = 0,644 \cdot b_w \cdot d \cdot [\rho_{sw,u} \cdot f_{ywd} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha + 1,11 \cdot \tau_c] \quad (6.50)$$

Para  $f_{ywd}$  e  $\tau_c$  em MPa,  $b_w$  e  $d$  em metros, resulta, finalmente, para  $V_R$  em kN:

$$V_R = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot [\rho_{sw,u} \cdot f_{ywd} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha + 1,11 \cdot \tau_c] \quad (6.51)$$

E, para estribos verticais:

$$V_R = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot [\rho_{sw,90} \cdot f_{ywd} \cdot \cot \theta + 1,11 \cdot \tau_c] \quad (6.52)$$

No modelo II  $\tau_c$  (ou  $V_c$  correspondente) varia com  $\tau_{sd}$  (ou  $V_{sd}$ ), e neste caso haverá dois valores para a força cortante resistente em função dos valores extremos de  $\tau_c$ :

- Máxima força cortante resistida: quando  $\tau_c = 0,6 \cdot f_{ctd} = 0,6 \cdot 0,15 \cdot f_{ct}^{2/3} = 0,09 \cdot f_{ct}^{2/3}$ ;
- Mínima força cortante resistida: quando  $\tau_c = 0$ .

### Exemplo 5

Refazer, com o modelo II da norma, o exemplo 4. Dados: aço CA50;  $f_{ct} = 20$  MPa; estribos de  $\phi = 6,3$  mm ( $0,32$  cm<sup>2</sup>);  $b_w = 0,25$  m;  $h = 0,90$  m;  $d = 0,8$  m;  $V_{S,max} = 255,5$  kN.

a) Verificação do esmagamento da biela de concreto

$$\tau_{sd} = \frac{V_{sd}}{b_w \cdot d} = \frac{1,4 \cdot 255,5}{0,25 \cdot 0,80} = 1789 \text{ kN/m}^2 = 1,79 \text{ MPa}$$

No cálculo de  $\tau_{Rd2,II}$  (equação 6.45), será usado para  $\theta$  (ângulo de inclinação das bielas comprimidas) o menor valor permitido (no caso  $30^\circ$ ) para se ter ideia do que ocorre quando se afasta bastante do modelo tradicional ( $\theta = 45^\circ$ ); para armadura transversal vertical,  $\alpha = 90^\circ$ .

$$\tau_{Rd2,II} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{ctd} \cdot \operatorname{sen}^2 \theta \cdot (\cot \alpha + \cot \theta)$$

$$\tau_{Rd2,II} = 0,54 \cdot \left(1 - \frac{20}{250}\right) \cdot \frac{20}{1,4} \cdot \operatorname{sen}^2 30 \cdot (\cot 90 + \cot 30) = 7,097 \cdot 0,433 = 3,07 \text{ MPa}$$

e, portanto,  $\tau_{sd} < \tau_{Rd2,II}$ , não havendo perigo de esmagamento do concreto das bielas; a tensão limite para a biela, neste caso, é menor que para  $\theta = 45^\circ$  ( $\tau_{Rd2,I} = 3,55$  MPa, modelo I).

b) Espaçamento da armadura transversal (estribos verticais simples,  $\phi = 6,3$  mm)

$$\tau_{sd} = \frac{V_{sd}}{b_w \cdot d} = \frac{1,4 \cdot 255,5}{0,25 \cdot 0,80} = 1789 \text{ kN/m}^2 = 1,79 \text{ MPa}$$

O valor de  $\tau_c$  é função de  $\tau_{sd}$ , e, na flexão simples, resulta:

$$\tau_c = 0 \text{ se } \tau_{sd} = \tau_{Rd2,II} = 3,07 \text{ MPa}$$

$$\tau_c = 0,6 \cdot f_{ctd} = 0,6 \cdot 0,15 \cdot f_{ct}^{2/3} = 0,09 \cdot \sqrt[3]{20^3} = 0,66 \text{ MPa se } \tau_{sd} \leq \tau_c = 0,6 \cdot f_{ctd} \text{ (igual ao modelo I).}$$

Neste caso, deve ser feita uma interpolação linear:

Valor de $\tau_c$ (MPa)	Valor de $\tau_{sd}$ (MPa)
0	3,07
$\tau_c$	1,79
0,66	0,66

resultando para  $\tau_c$ :

$$\frac{\tau_c - 0,66}{0,0 - 0,66} = \frac{1,79 - 0,66}{3,07 - 0,66} \Rightarrow \tau_c = 0,351 \text{ MPa}$$

e da equação 6.38:

$$\tau_{sv} = \tau_{sd} - \tau_c = 1,79 - 0,351 = 1,439 \text{ MPa}$$

Com a equação 6.47 e  $\theta = 30^\circ$  ( $\cot 30^\circ = 1,732$ ), resulta para a taxa de armadura transversal:

$$\rho_{sv,90} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sv}}{f_{ywd}} \cdot \frac{1}{\cot \theta} = \frac{1,11 \cdot 1,439}{500 / 1,15} \cdot \frac{1}{1,732} = 2,12 \cdot 10^{-3}$$

Finalmente pela equação 6.22 com estribos de  $\phi = 6,3$  mm ( $0,32 \text{ cm}^2$ ), resulta para o espaçamento:

$$\rho_{sw,90} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s} \Rightarrow 2,12 \cdot 10^{-3} = \frac{2 \cdot 0,32}{25 \cdot s} \Rightarrow 12,10 \text{ cm}$$

O modelo de cálculo II, para inclinação das bielas igual a 30°, apresentou espaçamento dos estribos maior que o calculado com o modelo I ( $s = 8,90 \text{ cm}$ ).

## 6.8 PRESCRIÇÕES PARA O DETALHAMENTO DA ARMADURA TRANSVERSAL

Como visto, as armaduras destinadas a resistir aos esforços de tração provocados por forças cortantes podem ser constituídas por estribos e barras dobradas.

Para detalhar a armadura transversal de uma viga devem ser observadas diversas recomendações, estabelecidas pela ABNT NBR 6118:2014, algumas das quais já tratadas em outros capítulos, tais como:

- **Cobrimento**, que são os já indicados para as demais armaduras, tratado no item 7.4 da norma (seção 4.6 do capítulo 4);
- **Ancoragem**, tratada no item 9.4.6 da norma (seção 5.3.2.4 do capítulo 5);
- **Ganchos e diâmetros internos de dobramento**, tratados no item 9.4.6.1 da norma (seção 5.3.3.2 do capítulo 5).

### 6.8.1 QUANTIDADE MÍNIMA DE ESTRIBOS

Nos elementos lineares submetidos à força cortante, deve sempre existir uma armadura transversal mínima. Fazem exceção: os elementos em que  $b_w > 5 \cdot d$  ( $d$  é a altura útil da seção), que devem ser tratados como laje (capítulo 7); as nervuras de lajes nervuradas com espaçamento menor ou igual a 65 cm (item 13.2.4.2 da norma); e alguns casos particulares de pilares e elementos lineares de fundação.

Particularmente no caso das vigas, conforme o item 17.4.1.1.1 da ABNT NBR 6118:2014, deve haver sempre uma armadura transversal mínima, constituída por estribos colocados em toda a sua extensão, com a seguinte taxa geométrica:

$$\rho_{sw,a} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \sin \alpha} \geq \rho_{sw,a,min} = \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \quad (6.53)$$

em que:

$A_{sw}$  – área da seção transversal dos estribos;

$s$  – espaçamento entre os estribos, medido segundo o eixo longitudinal da peça;

$\alpha$  – inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal da peça;

$b_w$  – largura média da alma;

$f_{ywk}$  – valor característico da resistência ao escoamento do aço da armadura transversal;

$f_{cm} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2}$ , resistência média à tração do concreto.

Assim, considerando uma seção em que o concreto tenha  $f_{ck} = 20$  MPa e a armadura transversal seja composta somente de estribos verticais ( $\alpha = 90^\circ$ ) de aço CA50 ( $f_{ytk} = 500$  MPa), o valor da taxa geométrica mínima será:

$$\rho_{rv,90} = 0,2 \cdot \frac{0,3 \cdot \sqrt[3]{20^2}}{500} = 0,00088$$

valor inferior ao exigido pela ABNT NBR 6118:1980 (0,0014), que era independente das resistências do concreto e do aço.

É possível determinar a força cortante resistida correspondente à taxa de armadura transversal mínima para uma dada seção e conhecidos o aço e o concreto; isso possibilita armar a viga apenas com a armadura transversal mínima em toda a sua extensão, complementando-a nos trechos em que a força cortante solicitante for maior que a resistida. O cálculo pode ser feito a partir das equações 6.42 e 6.51, correspondentes aos modelos de cálculo I e II, respectivamente:

Modelo I:

$$V_{RI,\rho_{min}} = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot \left[ 0,2 \cdot \frac{f_{cm}}{f_{ytk}} \cdot f_{ytk} \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha) + 0,1 \cdot f_{ck}^{2/3} \right]$$

$$V_{RI,\rho_{min}} = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot \left[ 0,2 \cdot \frac{0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}}{f_{ytk}} \cdot \frac{f_{ytk}}{1,15} \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha) + 0,1 \cdot f_{ck}^{2/3} \right]$$

$$V_{RI,\rho_{min}} = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot \left[ 0,0522 \cdot f_{ck}^{2/3} \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha) + 0,1 \cdot f_{ck}^{2/3} \right] \quad (6.54)$$

e para estribos verticais:

$$V_{RI,\rho_{min}} = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot (0,1522 \cdot f_{ck}^{2/3}) = 98 \cdot b_w \cdot d \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (6.55)$$

com  $V_{RI,\rho_{min}}$  em kN,  $b_w$  e  $d$  em metros e  $f_{ck}$  em MPa.

Modelo II:

$$V_{RII,\rho_{min}} = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot \left[ 0,0522 \cdot f_{ck}^{2/3} \cdot (\cot \alpha + \cot \theta) \cdot \text{sen}^2 \alpha + 1,11 \cdot \tau_c \right] \quad (6.56)$$

e para estribos verticais:

$$V_{R1,\rho_{\min}} = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot (0,0522 \cdot f_{ct}^{2/3} \cdot \cot \theta + 1,11 \cdot \tau_c) \quad (6.57)$$

com  $V_{R1,\rho_{\min}}$  em kN,  $b_w$  e  $d$  em metros e  $\tau_c$  em MPa, com os valores extremos  $\tau_c = 0,09 \cdot f_{ct}^{2/3}$  e  $\tau_c = 0$ .

### 6.8.2 CARACTERÍSTICAS DOS ESTRIBOS

Os estribos para a força cortante podem ser fechados ou abertos. Segundo o item 18.3.3.2 da norma, os estribos devem ter um ramo horizontal que envolva as barras da armadura longitudinal de tração (região de apoio das diagonais ou bielas), e serem ancorados na extremidade oposta. Quando essa extremidade puder estar em região também tracionada, o estribo deverá ter o ramo horizontal fechado nessa região ou complementado por meio de barra adicional.

Segundo esse mesmo item, o diâmetro da barra que constitui o estribo deverá atender aos seguintes limites:  $5 \text{ mm} \leq \phi \leq b_w/10$ .

Quando a barra for lisa, seu diâmetro não poderá ser superior a 12 mm. No caso de estribos formados por telas soldadas, o diâmetro mínimo pode ser reduzido para 4,2 mm, desde que sejam tomadas precauções contra sua corrosão.

O ângulo de inclinação  $\alpha$  das armaduras transversais em relação ao eixo do elemento estrutural deve estar compreendido entre  $45^\circ$  e  $90^\circ$ .

### 6.8.3 CONSTITUIÇÃO DA ARMADURA TRANSVERSAL

A ABNT NBR 6118:2014 (item 18.3.3.1) permite que a armadura transversal destinada a resistir aos esforços de tração provocados por forças cortantes seja constituída de estribos, combinados ou não com barras dobradas ou barras soldadas; entretanto, se houver barras dobradas, estas não poderão suportar mais do que 60% do esforço total a ser resistido pela armadura transversal (item 17.4.1.1.3).

Podem ser utilizadas barras transversais soldadas, devidamente ancoradas, combinadas com estribos fechados, também mantida a proporção resistente de 60% para as mesmas (item 17.4.1.1.4 da norma). Neste caso, se não forem utilizados estribos, a totalidade da armadura transversal deve ser de barras soldadas.

### 6.8.4 ESPAÇAMENTO ENTRE ELEMENTOS DA ARMADURA TRANSVERSAL

O espaçamento mínimo entre estribos, medido segundo o eixo longitudinal do elemento estrutural, deve ser suficiente para permitir a passagem do vibrador, garantindo um bom adensamento. O espaçamento máximo ( $s_{\max}$ ) deve atender às seguintes condições, de acordo com o item 18.3.3.2 da norma:

$$s_{\max} \leq \begin{cases} 0,6 \cdot d \leq 300 \text{ mm se } V_{Sd} \leq 0,67 \cdot V_{Rd2} \\ 0,3 \cdot d \leq 200 \text{ mm se } V_{Sd} > 0,67 \cdot V_{Rd2} \end{cases}$$

O espaçamento transversal ( $s_{t,max}$ ) entre ramos sucessivos de estribos não deverá exceder os seguintes valores:

$$s_{t,max} \leq \begin{cases} d \leq 800 \text{ mm se } V_{Sd} \leq 0,20 \cdot V_{Rd2} \\ 0,6 \cdot d \leq 350 \text{ mm se } V_{Sd} > 0,20 \cdot V_{Rd2} \end{cases}$$

sendo  $V_{Rd2}$  a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto; pode ser calculada pelas equações 6.31 e 6.44, para os modelos I e II, respectivamente.

### 6.8.5 CARGAS PRÓXIMAS AOS APOIOS

De acordo com o item 17.4.1.2.1 da ABNT NBR 6118:2014, para o cálculo da armadura transversal, no caso de apoio direto (carga e reação de apoio aplicadas em faces opostas do elemento estrutural, comprimindo-o), é permitido:

- considerar a força cortante oriunda de carga distribuída, no trecho entre o apoio e a seção situada à distância  $d/2$  da face do apoio, constante e igual à desta seção (Figura 6.18a);
- reduzir a força cortante devida a uma carga concentrada, aplicada à distância  $a \leq 2 \cdot d$  do eixo teórico do apoio, nesse trecho de comprimento  $a$ , multiplicando-a por  $a/(2 \cdot d)$  (Figura 6.18 b).

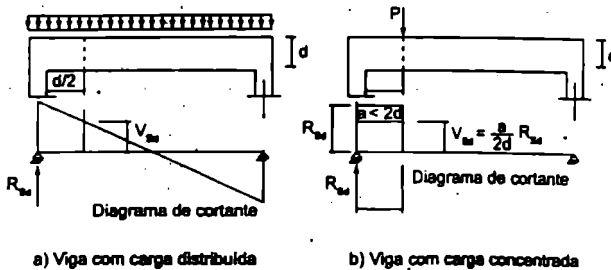


Figura 6.18 Redução da força cortante em regiões próximas aos apoios.

Essas reduções não se aplicam à verificação da resistência à compressão diagonal do concreto, ou seja, para a comparação de  $V_{Sd}$  com  $V_{Rd2}$  nos modelos I e II. No caso de apoios indiretos, as reduções também não são permitidas.

### EXEMPLO 6

Detalhar a armadura transversal (somente estribos) ao longo da viga V101 da Figura 6.17 (exemplo 1 do capítulo 4 e exemplo 4 do capítulo 5), utilizando o modelo de

cálculo I e as recomendações da ABNT NBR 6118:2014. Dados: CA50;  $f_{ck} = 15$  MPa; estribos de  $\phi = 6,3$  mm;  $b_w = 0,25$  m;  $d = 0,8$  m.

a) Verificação da tensão de compressão nas bielas (compressão diagonal do concreto)  
A verificação da compressão nas bielas de concreto (diagonais comprimidas) foi feita no exemplo 4 para a força cortante  $V = 255,5$  kN e  $f_{ck} = 20$  MPa, com o seguinte resultado:  $\tau_{sd} = 1,79$  MPa e  $\tau_{Rd2,1} = 3,55$  MPa ( $\tau_{sd} \leq \tau_{Rd2,1}$ ), não havendo perigo, portanto, de esmagamento do concreto das bielas.

b) Cálculo da armadura transversal mínima necessária para a viga

Antes de calcular e detalhar a armadura para toda a viga, será calculada a armadura mínima necessária conforme a norma. De acordo com o modelo I, a armadura mínima é dada pela equação 6.53:

$$\rho_{rw90,min} = 0,2 \cdot \frac{f_{cm}}{f_{ywk}} = 0,2 \cdot \frac{0,3 \cdot \sqrt{20^2}}{500} = 0,00088$$

O máximo espaçamento possível para que a taxa mínima necessária seja atingida para estribos verticais de 6,3 mm é:

$$\rho_{rw90,min} = \frac{A_{rw}}{b_w \cdot s} \Rightarrow 0,00088 = \frac{2 \cdot 0,32}{25 \cdot s} \Rightarrow s \leq 29,10 \text{ cm}$$

A norma também estabelece o máximo espaçamento que pode haver entre os estribos, dependendo do valor da relação entre  $V_{sd}$  e  $V_{Rd2}$ :

$$V_{sd} = 1,4 \cdot 255,5 = 357,70 \text{ kN}$$

$$V_{Rd2,1} = 0,27 \cdot (1 - f_{ck} / 250) \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d = 0,27 \cdot (1 - 20 / 250) \cdot \frac{20000}{1,4} \cdot 0,25 \cdot 0,80 = 709,70 \text{ kN}$$

$$\frac{V_{sd}}{V_{Rd2,1}} = \frac{357,70}{709,70} = 0,504 < 0,67 \Rightarrow s_{mín} \leq \begin{cases} 0,6 \cdot d = 0,6 \cdot 80 = 48 \text{ cm} \\ 30 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow s_{mín} \leq 30 \text{ cm}$$

Dessa maneira, o espaçamento correspondente à armadura mínima deverá ser, no máximo, igual a 29,10 cm. Será adotado, por facilidade de execução, espaçamento para a armadura mínima igual a:

$s = 25$  cm, com estribos verticais de  $\phi = 6,3$  mm.

c) Cálculo da força cortante resistida pela armadura mínima

É possível, agora, calcular qual a força cortante a que a viga resiste correspondente à armadura transversal mínima, no caso estribos simples de  $\phi = 6,3$  mm a cada 25 cm. Será colocada armadura mínima nos trechos em que a força cortante atuante for menor ou igual à correspondente a essa armadura mínima. Para cada um dos demais trechos (força cortante atuante maior que a mínima), será calculada a armadura (espaçamento e, se necessário, novo diâmetro do estribo) para a maior força cortante do trecho.

A taxa de armadura para a viga é dada pela equação 6.17, e no caso com estribos simples verticais ( $\alpha = 90^\circ$ ), de  $\phi = 6,3$  mm, espaçados em 25 cm, resulta:

$$\rho_{rw,90} = \frac{A_{rw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen}\alpha} = \frac{2 \cdot 0,32}{25 \cdot 25} = 0,001024$$

A força cortante resistida, correspondente a essa taxa, é calculada com a equação 6.43:

$$V_R = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot (\rho_{rw,90} \cdot f_{ywd} + 0,10 \cdot f_{ct}^{2/3})$$

$$V_R = 644 \cdot 0,25 \cdot 0,80 \cdot (0,001024 \cdot 500/1,15 + 0,10 \cdot 20^{2/3}) = 152,2 \text{ kN}$$

Verifica-se nos diagramas das figuras 6.17 e 6.19 que a força cortante nos apoios extremos (153,3 kN) é praticamente igual à força resistida pela armadura mínima, e no apoio central (à esquerda e à direita) a força cortante é maior (255,5 kN). Assim, nas regiões onde a força cortante é menor ou igual a 153,3 kN (admitida igual à resistida) será colocada armadura mínima, e nas regiões em que a força cortante está entre 153,3 kN e 255,5 kN deverá ser calculada e colocada a armadura para a maior força do trecho ( $V_s = 255,5$  kN).

A armadura transversal para  $V_s = 255,5$  kN, constituída de estribos simples verticais e  $\phi = 6,3$  mm, já foi determinada no exemplo 4 para aço CA50 e concreto com  $f_{ct} = 20$  MPa. O cálculo está reproduzido resumidamente a seguir:

$$\tau_{sd} = 1789 \text{ kN/m}^2 = 1,79 \text{ MPa}; \tau_c = 0,09 \cdot \sqrt{20^2} = 0,66 \text{ MPa}; \tau_{rw} = 1,79 - 0,66 = 1,13 \text{ MPa}$$

$$\rho_{rw,90} = \frac{1,11 \cdot \tau_{rw}}{f_{ywd}} = \frac{1,11 \cdot 1,13}{500/1,15} = 2,88 \cdot 10^{-3}; s = \frac{A_{rt}}{\rho_{rw,90} \cdot b_w} = \frac{2 \cdot 0,32}{2,88 \cdot 10^{-3} \cdot 25} = 8,90 \text{ cm}$$

O correto é escolher um espaçamento menor que o encontrado (8,90 cm), mas isso levará a uma execução mais trabalhosa, podendo inclusive haver problemas na concretagem; assim, nessas regiões, serão adotados estribos duplos de  $\phi 6,3$  mm a cada 17,5 cm, conforme detalhado na Figura 6.19. Em resumo:

- regiões em que a cortante é inferior a 153,3 kN → estribos simples de  $\phi = 6,3$  mm a cada 25,0 cm;
- regiões de cortante entre 153,3 kN e 255,5 kN → estribos duplos de  $\phi = 6,3$  mm a cada 17,5 cm.

d) Comprimento do trecho com armadura mínima

Pode-se determinar analiticamente, usando os valores do diagrama de forças cortantes, o comprimento  $c$ , a partir dos apoios extremos, do trecho da viga em que a armadura será a mínima. De acordo com o diagrama da Figura 6.19, por semelhança de triângulos tem-se:

$$\frac{153,3 + 255,5}{8} = \frac{153,3 + 153,3}{c} \Rightarrow c = 6,0 \text{ m}$$

e) Número de estribos em cada região

A quantidade de estribos em cada região, colocados a partir da face dos pilares, que têm dimensão de 40 cm na direção da viga, é a seguinte:

$$\text{regiões com armadura mínima: } n = \frac{600 - 20}{25} = 23,2 \rightarrow \text{adotam-se 24 estribos simples.}$$

$$\text{Demais regiões: } n = \frac{200 - 20}{17,5} = 10,28 \rightarrow \text{adotam-se 11 estribos duplos.}$$

Com todos os valores já obtidos, é feito o detalhamento dos estribos apresentado na Figura 6.19:

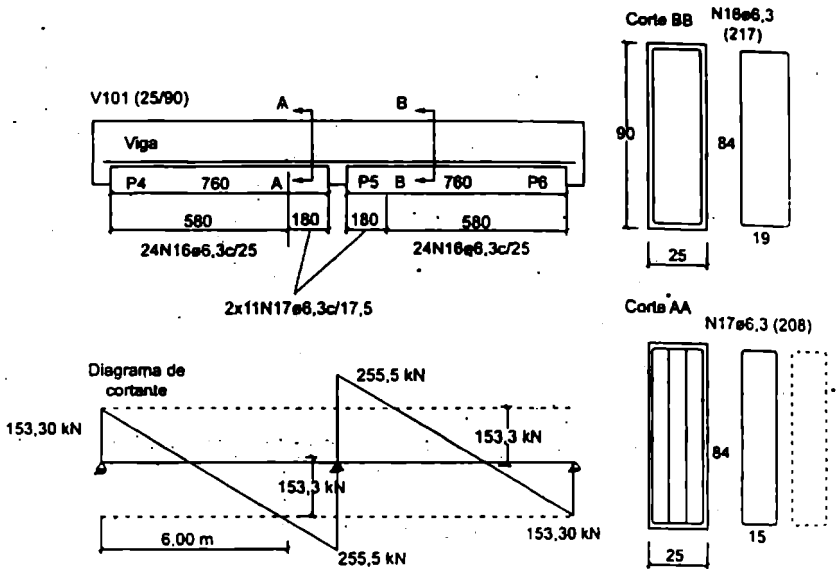


Figura 6.19 Detalhamento dos estribos da viga V101.

## ADENDO

### RESUMO DAS EXPRESSÕES RELACIONADAS NESTE CAPÍTULO

Expressões para a análise de tensões na flexão simples no estágio I (seções 6.1 a 6.3).

Tensão normal em uma seção a uma cota $y$ do centro de gravidade	
	$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y \quad (6.1)$
Tensão tangencial em uma seção a uma cota $y$ do centro de gravidade	
	$\tau = \frac{V \cdot M_y}{b_w \cdot I} \quad (6.2)$
Momento estático de uma seção retangular em um ponto distante $k$ da fibra comprimida	
	$M_y = \frac{1}{2} \cdot b_w \cdot (k \cdot h - k^2) \quad (6.3)$
Momento estático máximo de uma retangular	
	$M_{y,max} = \frac{b_w \cdot h^2}{8} \quad (6.4)$

Tensão tangencial máxima em uma seção retangular em função da altura
$\tau_{\max} = \frac{1,5 \cdot V}{b_w \cdot h} \quad (6.5)$
Tensão tangencial máxima em uma seção retangular em função do braço de alavanca
$\tau_{\max} = \frac{V}{b_w \cdot z} \quad (6.6)$
Tensão normal principal máxima (compressão) em uma seção
$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.7)$
Tensão normal principal mínima (tração) em uma seção
$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.8)$
Direção (inclinação) da tensão principal máxima $\sigma_1$
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (6.9)$

Expressões para a análise de cortante com a treliça clássica de Mörsch (seções 6.4 e 6.6).

Força resultante das tensões nas barras da armadura transversal em uma biela tracionada
$F_{st} \cdot \operatorname{sen} \alpha = V_s \quad (6.10)$
Força resultante das tensões em função da área das n barras da armadura em uma biela tracionada
$F_{st} = A_{st} \cdot n \cdot f_{yd} \quad (6.11)$
Força resultante das tensões nas barras da armadura transversal em uma biela tracionada no ELU
$F_{st} = \frac{V_{sd}}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (6.12)$

Relação entre a área da armadura transversal e força cortante no ELU	
$A_{sv} \cdot n \cdot f_{yd} = \frac{V_{Sd}}{\text{sen} \alpha} \quad (6.13)$	
Número de barras que compõem a biela tracionada	
$n = \frac{z + z \cdot \cot \alpha}{s} = \frac{z \cdot (1 + \cot \alpha)}{s} \quad (6.14)$	
Expressão para cálculo de espaçamento da armadura transversal	
$A_{sv} \cdot \frac{z \cdot (1 + \cot \alpha)}{s} \cdot f_{yd} = \frac{V_{Sd}}{\text{sen} \alpha} \quad (6.15)$	
Expressão para cálculo de espaçamento da armadura transversal	
$\frac{A_{sv}}{s} = \frac{V_{Sd}}{\text{sen} \alpha} \cdot \frac{1}{f_{yd} \cdot z \cdot (1 + \cot \alpha)} \quad (6.16)$	
Taxa de armadura transversal com inclinação $\alpha$	
$\rho_{sv,\alpha} = \frac{A_{sv}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen} \alpha} \quad (6.17)$	
Expressão para cálculo de espaçamento da armadura transversal a partir da taxa de armadura e braço de alavanca $z$	
$\frac{A_{sv}}{s \cdot b_w \cdot \text{sen} \alpha} = \frac{V_{Sd}}{b_w \cdot z \cdot f_{yd} \cdot \text{sen} \alpha \cdot \text{sen} \alpha \cdot (1 + \cot \alpha)} \quad (6.18)$	
Taxa da armadura transversal em função da força cortante atuante de cálculo	
$\rho_{sv,\alpha} = 1,10 \cdot \frac{V_{Sd}}{b_w \cdot d \cdot f_{yd} \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha)} \quad (6.19)$	
Taxa da armadura transversal em função da tensão convencional de cisalhamento de cálculo	
$\rho_{sv,\alpha} = \frac{1,10 \cdot \tau_{Sd}}{f_{yd}} \cdot \frac{1}{\text{sen} \alpha \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha)} \quad (6.20)$	
Espaçamento da armadura transversal em função da altura útil $d$ e da força cortante de cálculo	
$s = \frac{A_{sv} \cdot d \cdot f_{yd} \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha)}{1,10 \cdot V_{Sd}} \quad (6.21)$	

<p>Taxa de armadura transversal vertical (estribos verticais)</p>
$\rho_{tw,90} = \frac{A_{tw}}{b_w \cdot s} \quad (6.22)$
<p>Taxa da armadura transversal vertical (estribos verticais) em função da tensão convencional de cisalhamento de cálculo</p>
$\rho_{tw,90} = \frac{1,10 \cdot \tau_{Sd}}{f_{yd}} \quad (6.23)$
<p>Espaçamento da armadura transversal vertical (estribos verticais) em função da altura útil <math>d</math> e da força cortante de cálculo</p>
$s = \frac{A_{tw} \cdot d \cdot f_{yd}}{1,10 \cdot V_{Sd}} \quad (6.24)$
<p>Largura da biela comprimida</p>
$AB = z \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot (\operatorname{cot} \alpha + \operatorname{cot} \beta) \quad (6.25)$
<p>Tensão na biela comprimida em função da força cortante de cálculo</p>
$\sigma_c = \frac{V_{Sd}}{b_w \cdot z} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta \cdot (\operatorname{cot} \alpha + \operatorname{cot} \beta)} \quad (6.26)$
<p>Tensão na biela comprimida em função da tensão máxima de cisalhamento</p>
$\sigma_c = \frac{\tau_{máx}}{\operatorname{sen}^2 \beta \cdot (\operatorname{cot} \alpha + \operatorname{cot} \beta)} \quad (6.27)$
<p>Tensão na biela comprimida em função da tensão de cisalhamento convencional de cálculo</p>
$\sigma_c = \frac{1,10 \cdot \tau_{Sd}}{\operatorname{sen}^2 \beta \cdot (\operatorname{cot} \alpha + \operatorname{cot} \beta)} \quad (6.28)$

**Expressões para a verificação do estado limite último (seção 6.7.2).**

<p>Verificação das diagonais (bielas) comprimidas</p>
$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \quad (6.29)$
<p>Verificação da ruína por tração diagonal com parcelas absorvidas por mecanismos complementares e por armadura transversal</p>
$V_{Sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{tw} \quad (6.30)$

**Expressões relativas ao modelo de cálculo I (seção 6.7.2.1).**

Verificação da diagonal comprimida em termos de força cortante

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2,I} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \quad (6.31)$$

Verificação da diagonal comprimida em termos de tensão

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd2,I} = 0,27 \cdot (1 - f_{ct}/250) \cdot f_{cd} \quad (6.32)$$

Parcela da força cortante de cálculo absorvida por armadura transversal

$$V_{SW} = V_{Rd2} - V_c \quad (6.33)$$

Parcela da força cortante de cálculo absorvida por armadura transversal no ELU

$$V_{SW} = V_{Sd} - V_c \quad (6.34)$$

Parcela da força cortante de cálculo absorvida pelo concreto (mecanismos complementares)

$$V_c = 0,6 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \quad (6.35)$$

Parcela da força cortante de cálculo resistida por armadura transversal

$$V_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\text{sen} \alpha + \text{cos} \alpha) \quad (6.36)$$

Parcela da força cortante de cálculo resistida por armadura transversal vertical

$$V_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \quad (6.37)$$

Parcela da tensão de cisalhamento de cálculo absorvida por armadura transversal

$$\tau_{sw} = \tau_{Sd} - \tau_c \quad (6.38)$$

Taxa de armadura transversal em função da tensão de cisalhamento

$$\rho_{sw,\alpha} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} \cdot \frac{1}{\text{sen} \alpha \cdot (\text{sen} \alpha + \text{cos} \alpha)} \quad (6.39)$$

Taxa de armadura transversal vertical em função da tensão de cisalhamento

$$\rho_{sw,90} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} \quad (6.40)$$

Valor em N da força cortante de cálculo resistida por armadura transversal

$$V_R = 0,644 \cdot b_w \cdot d \cdot \left[ \rho_{sw,\alpha} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\text{sen} \alpha + \text{cos} \alpha) + 0,10 \cdot f_{ct}^{2/3} \right] \quad (6.41)$$

<i>Idem em kN</i>	
$V_R = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot [\rho_{sw,\alpha} \cdot f_{ywd} \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\text{sen} \alpha + \cos \alpha) + 0,10 \cdot f_{ck}^{2/3}]$	(6.42)
<i>Idem em kN para estribos verticais</i>	
$V_R = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot [\rho_{sw,90} \cdot f_{ywd} + 0,10 \cdot f_{ck}^{2/3}]$	(6.43)

**Expressões relativas ao modelo de cálculo II (seção 6.7.2.2).**

<i>Verificação da diagonal comprimida em termos de força cortante</i>	
$V_{Rd2,II} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (\text{cota} + \text{cot} \theta)$	(6.44)
<i>Verificação da diagonal comprimida em termos de tensão</i>	
$\tau_{Rd2,II} = 0,54 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (\text{cota} + \text{cot} \theta)$	(6.45)
<i>Parcela da força cortante de cálculo resistida por armadura transversal</i>	
$V_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot (\text{cot} \alpha + \text{cot} \theta) \cdot \text{sen} \alpha$	(6.46)
<i>Taxa de armadura transversal em função da tensão de cisalhamento</i>	
$\rho_{sw,\alpha} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} \cdot \frac{1}{\text{sen} \alpha \cdot (\text{cot} \alpha + \text{cot} \theta)}$	(6.47)
<i>Parcela da força cortante de cálculo resistida por armadura transversal</i>	
$V_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \cdot \text{cot} \theta$	(6.48)
<i>Taxa de armadura transversal vertical em função da tensão de cisalhamento</i>	
$\rho_{sw,90} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} \cdot \frac{1}{\text{cot} \theta}$	(6.49)
<i>Valor em N da força cortante de cálculo resistida por armadura transversal</i>	
$V_R = 0,644 \cdot b_w \cdot d \cdot [\rho_{sw,\alpha} \cdot f_{ywd} \cdot (\text{cota} + \text{cot} \theta) \cdot \text{sen}^2 \alpha + 1,11 \cdot \tau_c]$	(6.50)
<i>Idem em kN</i>	
$V_R = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot [\rho_{sw,\alpha} \cdot f_{ywd} \cdot (\text{cota} + \text{cot} \theta) \cdot \text{sen}^2 \alpha + 1,11 \cdot \tau_c]$	(6.51)
<i>Idem em kN para estribos verticais</i>	
$V_R = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot [\rho_{sw,90} \cdot f_{ywd} \cdot \text{cot} \theta + 1,11 \cdot \tau_c]$	(6.52)

**Expressões de valores mínimos para armadura transversal.**

Taxa de armadura transversal (estribos) mínima

$$\rho_{sw,\alpha} = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \text{sen}\alpha} \geq \rho_{sw\alpha,\text{min}} = \frac{f_{ctm}}{f_{ywk}} \quad (6.53)$$

Valor em kN da força cortante resistida por armadura transversal mínima (modelo I)

$$V_{RI,\rho,\text{min}} = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot \left[ 0,0522 \cdot f_{ck}^{2/3} \cdot \text{sen}\alpha \cdot (\text{sen}\alpha + \cos\alpha) + 0,1 \cdot f_{ck}^{2/3} \right] \quad (6.54)$$

*Idem* para estribos verticais

$$V_{RI,\rho,\text{min}} = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot (0,1522 \cdot f_{ck}^{2/3}) = 98 \cdot b_w \cdot d \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (6.55)$$

Valor em kN da força cortante resistida por armadura transversal mínima (modelo II)

$$V_{RII,\rho,\text{min}} = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot \left[ 0,0522 \cdot f_{ck}^{2/3} \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) \cdot \text{sen}^2\alpha + 1,11 \cdot \tau_c \right] \quad (6.56)$$

*Idem* para estribos verticais

$$V_{RII,\rho,\text{min}} = 644 \cdot b_w \cdot d \cdot (0,0522 \cdot f_{ck}^{2/3} \cdot \cot\theta + 1,11 \cdot \tau_c) \quad (6.57)$$



## CAPÍTULO 7

### PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS COM LAJES MACIÇAS

#### 7.1 INTRODUÇÃO

Sob o ponto de vista estrutural, lajes são placas de concreto e estas últimas são elementos estruturais de superfície plana (elementos laminares simétricos em relação ao seu plano médio), em que a dimensão perpendicular à superfície, usualmente chamada espessura, é relativamente pequena comparada às demais (largura e comprimento) e sujeitas principalmente a ações normais a seu plano.

Quando as ações estão contidas em seu plano, os elementos de superfície são chamados de chapas; se forem de concreto, cujo vão seja três vezes menor que a maior dimensão da seção transversal, são usualmente denominadas vigas-parede.

Os elementos estruturais de superfície não plana são chamados de cascas. Essas definições podem ser encontradas no item 14.4.2 da ABNT NBR 6118:2014.

O pavimento de uma edificação, que é um elemento estrutural de superfície, pode ser projetado com elementos pré-moldados ou moldados no local. O pavimento moldado no local pode ser composto de uma única laje (maciça ou nervurada), sem vigas, ou de um conjunto de lajes, maciças ou nervuradas, apoiadas em vigas. Essas três possibilidades estão mostradas na Figura 7.1. Neste capítulo, estuda-se apenas o segundo caso, ou seja, pavimento composto de lajes maciças de concreto armado (placas de concreto) apoiadas em vigas em seu contorno.

Uma das características das lajes maciças é que elas distribuem, diferentemente das pré-moldadas, como visto no capítulo 2, suas reações em todas as vigas de contorno. Com isso, há um melhor aproveitamento das vigas do pavimento, pois todas elas, dependendo apenas dos vãos e condições de contorno, podem ter cargas da mesma ordem de grandeza. Outra vantagem em relação às pré-moldadas está na facilidade em colocar, antes da concretagem, tubulações elétricas ou de outros tipos de instalações.

É oportuno destacar que as fôrmas representam uma grande parcela do custo final da estrutura, e em particular da laje; entretanto, o custo de pavimentos com lajes maciças diminui consideravelmente quando o pavimento se repete, pois pode ser utilizado o mesmo jogo de fôrmas e escoramentos várias vezes.

A relação entre a altura (espessura) e o menor vão da laje de pavimentos de edifícios costuma variar de 1/40 a 1/60. Considera-se que a laje cuja relação se encaixa dentro desses limites tem uma altura considerada pequena para efeito de cálculo. As

placas de espessura maior que  $\frac{1}{3}$  do vão devem ser calculadas como placas espessas (não apresentadas neste livro).

Quando a relação entre o vão maior e o menor da laje é menor ou igual a dois, costuma-se considerar, para efeito de cálculo, que essa laje trabalha em duas direções ou é armada em duas direções; quando essa relação é maior que dois, a laje é considerada trabalhando em apenas uma direção (a do menor vão) e é armada apenas nessa direção (sem levar em conta armaduras construtivas ou mínimas exigidas).

A concretagem de lajes e vigas costuma ser realizada de uma única vez, definindo um único elemento laje-viga, embora, por questão de simplificação e para efeito de cálculo, geralmente não se considere esta ligação monolítica, admitindo-se a laje simplesmente apoiada nas vigas de contorno, no caso de lajes isoladas.

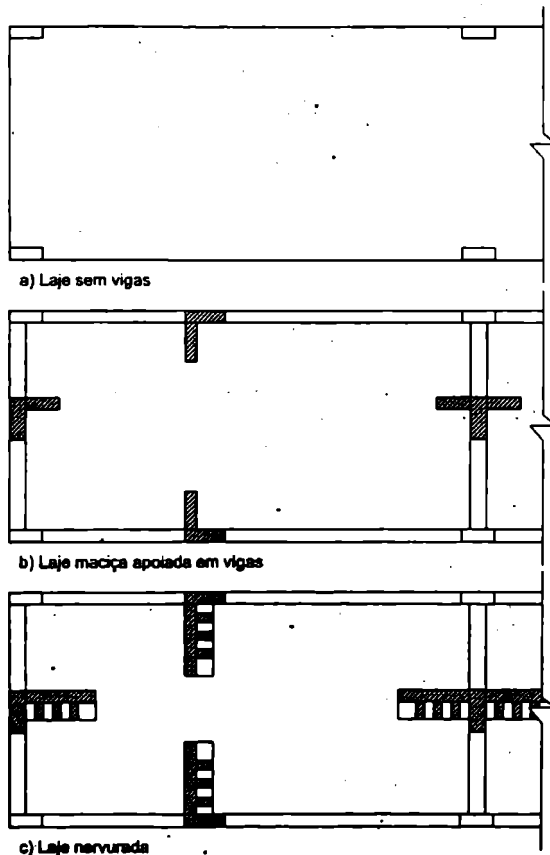


Figura 7.1 Esquemas estruturais de pavimentos de concreto.

## 7.2 MÉTODOS DE CÁLCULO

Há basicamente dois métodos de cálculo para as lajes maciças: o elástico e o de ruptura. O primeiro se baseia na análise do comportamento do elemento sob cargas de serviço e concreto íntegro (não fissurado). O segundo procedimento se baseia nos mecanismos de ruptura das lajes. Os dois procedimentos anteriores têm deficiências.

No método elástico, subestimam-se os deslocamentos, pois não é considerada a fissuração do concreto; também não se pode dizer que os esforços na situação de ruptura, usados no cálculo da armadura, são proporcionais aos obtidos em serviço.

O método de ruptura é desenvolvido com base no mecanismo de ruptura da laje, ou seja, procura identificar de que forma a laje chega ao colapso, e, para esta situação, são calculados os esforços pela chamada teoria das charneiras plásticas; normalmente, é difícil, neste caso, determinar os deslocamentos, não sendo possível, assim, precisar informações sobre o comportamento da estrutura em serviço. As recomendações sobre o método estão nos itens 14.6.5 e 14.7.4 da ABNT NBR 6118:2014.

Apesar das diferenças, em ambos são utilizados os conceitos de ruptura da seção transversal no cálculo e detalhamento da armadura e os conceitos de método elástico na verificação do comportamento da estrutura em serviço.

Neste livro não será abordado o método de cálculo de lajes na ruptura; apenas recomenda-se a leitura, entre outros, dos trabalhos de Johansen, Langendonck e Montoya et al.<sup>35</sup>

## 7.3 MÉTODO ELÁSTICO

O método elástico, clássico ou linear (denominação usada na norma brasileira), pode ser também designado por teoria das placas delgadas ou, ainda, pela de Kirchhoff, e pode ser encontrado detalhadamente em Timoshenko & Woinowsky, Martinelli et al. e Bares.<sup>36</sup> Esse método se baseia nas equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal de placa e nas relações de compatibilidade das deformações do mesmo. Como já explanado, as lajes maciças são placas delgadas de concreto e, portanto, a elas se aplicam todos os conceitos e teorias desenvolvidas para as placas delgadas.

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, item 14.7.3, os métodos baseados na teoria da elasticidade podem ser utilizados nas estruturas de placas, com coeficiente de Poisson  $\nu$  (relação entre as deformações transversal e longitudinal de um elemento submetido a uma determinada força) igual a 0,2, desde que atendidas as condições dos itens 14.5.2 e 14.5.3, que tratam da análise linear, e dos itens 14.7.3.1 e 14.7.3.2, que se referem aos valores de rigidez e das condições de redistribuição de momentos e de ductilidade a respeitar.

35 Johansen (1962, 1972), Langendonck (1970) e Montoya et al. (1991).

36 Timoshenko & Woinowsky (1959), Martinelli et al. (1986) e Bares (1972).

Basicamente, a norma estabelece que o valor do módulo de elasticidade a ser usado é o secante  $E_{cs}$  e que na análise global e determinação de esforços podem ser consideradas as características geométricas da seção bruta de concreto dos elementos estruturais. Em análises locais para cálculo dos deslocamentos, na eventualidade da fissuração, esta deve ser considerada. Também prescreve que os resultados de uma análise linear são usualmente empregados para a verificação de estados limites de serviço, e especifica ainda que os esforços solicitantes decorrentes de uma análise linear podem servir de base para o dimensionamento dos elementos estruturais no estado limite último, mesmo que esse dimensionamento admita a plastificação dos materiais, desde que se garanta uma ductilidade mínima às peças.

### 7.3.1 HIPÓTESES DE CÁLCULO

Considera-se que as placas são constituídas de material homogêneo, elástico, isotropo, linear fisicamente e têm pequenos deslocamentos. O concreto armado não é um material homogêneo, pois é constituído de aço e concreto, porém, para fins práticos e simplificação de cálculo, será admitido assim.

A propriedade da elasticidade refere-se ao fato de que o elemento feito de material elástico volta à sua forma inicial quando é retirada a carga que nele atua.

Material **isótropo** é aquele que tem as mesmas propriedades independentemente da direção observada, ao contrário do material **ortótropo**, que tem propriedades diferentes em duas direções ortogonais.

Diz-se que um material é **linear fisicamente** quando a relação entre tensões e deformações se mantém linear, não se levando em conta, portanto, a fissuração, no caso do concreto.

A consideração de **pequenos deslocamentos** permite efetuar os cálculos usando o princípio da superposição de efeitos, ou seja, admite-se a linearidade geométrica, que é verificada, na prática, na maioria dos casos.

Quando há **linearidade geométrica**, os esforços, e conseqüentemente as tensões, não são afetados pelo estado de deformação da estrutura.

Admite-se também a manutenção da seção plana após a deformação e a representação dos elementos por seu plano médio.

Para facilitar o emprego das condições de contorno na resolução do problema de determinação de esforços, fazem-se, na maioria das vezes, outras considerações, tais como:

- a) A ação das placas nas vigas de contorno se faz somente por meio de forças verticais, não havendo transmissão de momentos de torção para as vigas;
- b) As ações das placas nas vigas são uniformemente distribuídas e não há transmissão de carga diretamente para os pilares; a carga nas placas é transferida para as vigas e, daí, para os pilares;
- c) As vigas de contorno são indeslocáveis na direção vertical;

d) A rotação das placas no contorno é livre (apoio simples) ou totalmente impedida (engastada).

Na bibliografia citada há algumas soluções em que a rigidez vertical da viga é considerada, assim como há processos que possibilitam utilizar uma rigidez à rotação intermediária entre a livre e a engastada. Essas soluções são difíceis de se empregar na prática e acabam servindo mais como parâmetro de controle para outros processos.

### 7.3.2 EQUAÇÃO FUNDAMENTAL

A equação diferencial fundamental das placas delgadas (obtida por equilíbrio e compatibilidade de deslocamentos de um elemento infinitesimal, relacionando momentos fletores com curvatura) submetidas a uma carga  $p(x, y)$  é:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{p}{D} \quad (7.1)$$

em que:

$w$  – deslocamento vertical;

$x, y$  – coordenadas de um ponto genérico da placa;

$p$  – intensidade da carga atuante;

$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$  – é a rigidez à flexão da placa;

$E$  – módulo de deformação longitudinal do concreto;

$\nu$  – coeficiente de Poisson.

Resolvendo a equação fundamental 7.1, obtém-se a expressão para a superfície elástica  $w = w(x, y)$ , e com suas derivadas os momentos  $m_x$  e  $m_y$  nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente:

$$\frac{m_x}{D} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (7.2)$$

$$\frac{m_y}{D} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (7.3)$$

É interessante analisar a rigidez à flexão  $D$  da placa. A equação fundamental foi obtida para momentos atuando por unidade de comprimento, ou seja, se atuar um momento total  $M_x$  (adota-se como  $M_x$  o momento que deve ser resistido com armadura na direção  $x$ ) na placa, de largura  $\ell$ , o momento  $m_x$  em uma largura unitária é, conforme a Figura 7.2:

$$m_x = \frac{M_x}{\ell_y} \tag{7.4}$$

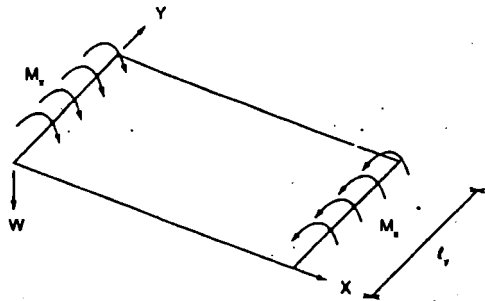


Figura 7.2 Momento  $m_x$  por unidade de comprimento atuante na placa.

A rigidez à flexão da placa transforma, numérica e dimensionalmente, curvaturas em momentos do mesmo modo que nas vigas. Para efeito de comparação, considere uma viga de altura  $h$  e largura  $b$  unitária (Figura 7.3).

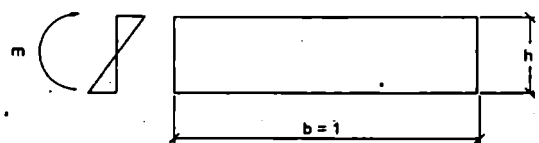


Figura 7.3 Seção transversal de uma viga de altura  $h$  e largura unitária.

Para essa viga, o produto de rigidez ( $E \cdot I$ ) é dado por:

$$E \cdot I = E \cdot \frac{1 \cdot h^3}{12} = \frac{E \cdot h^3}{12} \tag{7.5}$$

que equivale à rigidez  $D$  da placa (com largura unitária e mesma altura da viga), a menos do fator  $(1 - \nu^2)$ ; esse fator faz com que  $D$  seja maior que o produto  $E \cdot I$  ( $D > E \cdot I$ ), donde se conclui que a placa é mais rígida do que a viga (para uma mesma largura e altura).

Como o coeficiente de Poisson tem, usualmente, valores entre 0,1 e 0,4, dependendo do material, verifica-se que a diferença entre a rigidez da placa e da viga não é tão significativa, conforme indicado no Quadro 7.1.

**Quadro 7.1** Valores da rigidez de uma viga e laje de mesma altura.

v	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
$(1 - v^2)$	1,00	0,99	0,96	0,91	0,84
Viga: $E \cdot I$	$0,083 \cdot h^3 \cdot E \cdot I$	$0,083 \cdot h^3 \cdot E \cdot I$	$0,083 \cdot h^3 \cdot E \cdot I$	$0,083 \cdot h^3 \cdot E \cdot I$	$0,083 \cdot h^3 \cdot E \cdot I$
Laje: $D$	$0,083 \cdot h^3 \cdot E \cdot I$	$0,084 \cdot h^3 \cdot E \cdot I$	$0,087 \cdot h^3 \cdot E \cdot I$	$0,092 \cdot h^3 \cdot E \cdot I$	$0,099 \cdot h^3 \cdot E \cdot I$

### 7.3.3 PROCESSOS DE RESOLUÇÃO

A determinação dos esforços e dos deslocamentos de placas pode ser feita considerando-se as cargas em serviço, a partir da equação fundamental, ou, simplesmente, montando outro tipo de modelo, visto que essa equação tem solução analítica para poucos casos. Dessa forma, há os seguintes processos de resolução, sendo que aqui será empregado o último deles para o cálculo das lajes:

- a) Diferenças finitas;
- b) Elementos finitos;
- c) Grelha equivalente;
- d) Utilização de séries para a representação do valor de  $p(x,y)$ .

### 7.3.4 CÁLCULO POR DIFERENÇAS FINITAS

O cálculo por diferenças finitas consiste na integração numérica da equação diferencial, que é substituída por outra, de diferenças finitas. No cálculo, a placa é dividida em uma malha que se adapte ao seu contorno, e substituem-se as derivadas por expressões aproximadas, determinadas empregando-se convenientes polinômios de interpolação.

As derivadas do polinômio são consideradas como aproximadamente iguais às da função incógnita, cujas derivadas parciais se pretende substituir pelas diferenças finitas, como, por exemplo:

$$\frac{d_y}{d_x} \cong \frac{\Delta_y}{\Delta_x} \cong \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Essas expressões são aplicadas para diversos pontos, permitindo que a solução do problema seja feita geralmente por meio da resolução de um sistema de equações lineares.<sup>37</sup>

### 7.3.5 PROCESSO DOS ELEMENTOS FINITOS

No processo de elementos finitos, subdivide-se a placa em elementos de dimensão finita conectados por pontos nodais, impondo-se nestes pontos a compatibilidade de esforços e de deslocamentos. É utilizada, para tanto, a equação fundamental, exprimindo-se

37 Martinelli et al. (1986).

os deslocamentos  $w$  com polinômios cujos coeficientes devem ser determinados. Essas condições, aplicadas aos diversos pontos nodais dos elementos, conduzem a um sistema de equações lineares cuja solução não apresenta grandes dificuldades.

### 7.3.6 PROCESSO DE GRELHA EQUIVALENTE

O processo de grelha equivalente ou analogia de grelha foi utilizado inicialmente por Marcus<sup>33</sup> para calcular esforços em placas com bordas indesejáveis verticalmente. O procedimento consiste em substituir a placa (laje) por uma malha equivalente de vigas (grelha equivalente).

No caso de pavimentos de edifícios compostos de lajes e vigas, pode-se usar o mesmo procedimento. A Figura 7.4a apresenta a planta de um pavimento em que se identificam duas lajes, cinco vigas e seis pilares. Na Figura 7.4b são indicados os eixos dos elementos da grelha equivalente que representa a estrutura mostrada na Figura 7.4a. Os pilares são considerados, nessa situação, indeformáveis na direção vertical.

As cargas distribuídas se dividem entre os elementos da grelha equivalente de acordo com a área de influência de cada elemento. Podem ser consideradas uniformemente distribuídas ao longo dos elementos ou, dentro de certa aproximação, concentradas nos nós. As cargas concentradas atuantes na estrutura devem ser aplicadas nos nós da malha; quando a posição delas não coincidir com um nó, deve-se adequar a malha ou adotar valores equivalentes da carga nos nós mais próximos.

A rigidez (deslocamento para um esforço unitário de certo elemento) à torção e a rigidez à flexão são tratadas como concentradas nos elementos correspondentes da grelha equivalente. Cada uma deve ter valor tal que, ao se carregar a estrutura real e a da grelha equivalente, se obtenha o mesmo estado de deformação e os mesmos esforços nas duas estruturas. Isso ocorre apenas aproximadamente em virtude da diferença de características das duas estruturas. Entretanto, utilizando malhas com espaçamentos adequados e definindo as rigidezes de maneira apropriada, consegue-se obter valores razoáveis para os deslocamentos e esforços do pavimento.

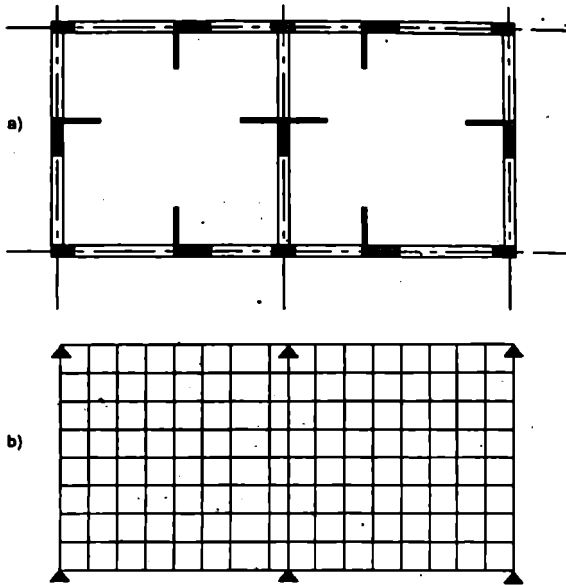


Figura 7.4 a) Planta de fôrmas de um pavimento com lajes e vigas. b) Grelha equivalente representando o pavimento.

A utilização de programas de computador para a resolução de grelhas equivalentes foi feita inicialmente por Lightfoot & Sawko.<sup>39</sup> Usando a analogia de grelha e um programa de computador, é possível resolver pavimentos de edifícios com grandes dimensões em planta, contornos não regulares, vazios internos (poços de elevadores) e lajes com e sem vigas. No Anexo 3 apresenta-se o método com mais detalhes e os resultados de alguns exemplos resolvidos.

### 7.3.7 DETERMINAÇÃO DE ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS POR MEIO DE SÉRIES

Será utilizado aqui o tradicional processo de resolução de placas elásticas por meio de séries para o cálculo das lajes maciças de concreto armado. Serão apresentadas resumidamente, sem o desenvolvimento teórico, as soluções de placas retangulares isoladas e submetidas à carga uniformemente distribuída.

#### 7.3.7.1 Fundamentos do processo

No cálculo por séries, substitui-se o valor de  $p(x,y)$  por uma série normalmente composta de funções trigonométricas, obtendo-se uma solução para a integração da equação fundamental.

39 Lightfoot & Sawko (1959).

Uma solução, desenvolvida por Navier,<sup>40</sup> é representar a carga  $p(x,y)$  por uma série de Fourier dupla (superposição de carregamentos com a forma bissenoidal) do tipo:

$$p = p(x,y) = \sum_m \sum_n p_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (7.6)$$

em que:

$a$  e  $b$  – dimensões da placa;

$m$  e  $n$  – número de retângulos em que se divide a placa, cada um com lados  $a/m$  e  $b/n$ ;

$p_{mn}$  – valor máximo do carregamento no centro de cada retângulo.

A linha elástica  $w(x,y)$  (forma da superfície da placa após sua deformação) afim ao carregamento (tem a mesma forma do carregamento, ou seja, é uma função do mesmo tipo) é dada por uma série dupla e obtida a partir das derivadas da equação fundamental e das condições de contorno para a placa, apoiada ao longo das bordas (deslocamentos verticais impedidos) e com rotação livre, resultando:

$$w = \frac{p_{mn}}{\pi^4 \cdot D \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (7.7)$$

Os valores de  $p_{mn}$  são dados por:

$$p_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \cdot \int_0^a \int_0^b p(x,y) \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \cdot dx \cdot dy \quad (7.8)$$

Com  $m$  e  $n$  ímpares (1, 3, 5...), pois valores pares de  $m$  e  $n$  levam a  $p_{mn} = 0$ , e com  $p(x,y) = \bar{p}$  = carga uniformemente distribuída,  $p_{mn}$  torna-se:

$$p_{mn} = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^2 \cdot m \cdot n} \quad (7.9)$$

Superpondo os efeitos, e colocando  $p_{mn}$  da equação 7.9 na expressão da linha elástica, tem-se, finalmente, a função  $w(x,y)$  para carga uniforme:

$$w = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^4 \cdot D} \cdot \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}}{m \cdot n \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (7.10)$$

<sup>40</sup> Timoshenko & Woinowsky (1959).

Os momentos  $m_x$  e  $m_y$ , por faixa de comprimento unitário, nas direções  $x$  e  $y$  (direções de colocação da armadura) são obtidos a partir das derivadas da superfície elástica  $w(x,y)$ , conforme as equações 7.2 e 7.3, resultando, finalmente, nas expressões:

$$m_x = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^4} \cdot \sum_m \sum_n \frac{\left( \frac{m^2}{a^2} + v \cdot \frac{n^2}{b^2} \right)}{m \cdot n \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (7.11)$$

$$m_y = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^4} \cdot \sum_m \sum_n \frac{\left( \frac{n^2}{b^2} + v \cdot \frac{m^2}{a^2} \right)}{m \cdot n \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (7.12)$$

As expressões de  $m_x$  e  $m_y$  dependem exclusivamente de  $a$ ,  $b$ ,  $\bar{p}$ , e de quantos valores de  $m$  e  $n$  serão considerados, ou seja, qual a precisão que se pretende atingir.

Substituindo-se os valores de  $x$  e  $y$  por  $a/2$  e  $b/2$  nas equações 7.11 e 7.12, podem ser determinados os momentos no centro de uma placa retangular. Conforme demonstram Martinelli et al.,<sup>41</sup> para uma placa quadrada de lado  $a$ , calculando-se os momentos para os quatro primeiros termos da série [ $m = 1, n = (1;3)$ ;  $m = 3, n = (1;3)$ ], obtém-se  $m_x = 0,046925 \cdot \bar{p} \cdot a^2$ , e com 49 termos obtém-se  $m_x = 0,047913 \cdot \bar{p} \cdot a^2$  ( $\bar{p}$  é o carregamento uniforme distribuído na placa), o que demonstra uma boa aproximação já com quatro termos.

As equações 7.11 e 7.12 valem para um determinado valor de  $v$ , que nem sempre corresponde ao indicado pelas normas. Conhecidos os momentos  $m_x$  e  $m_y$  e o deslocamento máximo  $w$  para um valor de  $v_1$ , é possível conhecê-los para um novo coeficiente  $v_2$  com as seguintes expressões:

$$(m_x)_{v_2} = \frac{1}{(1-v_2^2)} \cdot \{ (1-v_2 \cdot v_1) \cdot (m_x)_{v_1} + (v_1 - v_2) \cdot (m_y)_{v_1} \} \quad (7.13)$$

$$(m_y)_{v_2} = \frac{1}{(1-v_2^2)} \cdot \{ (1-v_2 \cdot v_1) \cdot (m_y)_{v_1} + (v_1 - v_2) \cdot (m_x)_{v_1} \} \quad (7.14)$$

$$(w)_{v_2} = (w)_{v_1} \cdot \frac{1-v_2^2}{1-v_1^2} \quad (7.15)$$

41. Martinelli et al. (1986).

### 7.3.7.2 Utilização de quadros

O processo de cálculo de placas por séries é bastante adequado para a confecção de quadros que facilmente possibilitam determinar momentos fletores máximos e deslocamentos máximos (flechas) a partir da geometria e das condições de vinculação da placa. Para isso, o pavimento deve ser discretizado, ou seja, cada laje deve ser tratada individualmente, de acordo com sua vinculação às demais (só são possíveis bordas – contorno – simplesmente apoiadas ou engastadas). De maneira geral, considera-se que as lajes menores e menos rígidas são engastadas nas maiores e mais rígidas.

Os quadros apresentados na sequência são baseados nas soluções em séries desenvolvidas por Bares<sup>42</sup> e devidamente adaptados para o coeficiente de Poisson  $\nu$  igual a 0,20. As diversas condições de vinculação possíveis estão esquematizadas na Figura 7.5. O contorno representado por linha simples indica borda simplesmente apoiada, e o contorno representado por uma hachura indica borda engastada. No Anexo 3 são comparados resultados obtidos com os quadros e com o método de analogia de grelhas para algumas situações de lajes e pavimento.

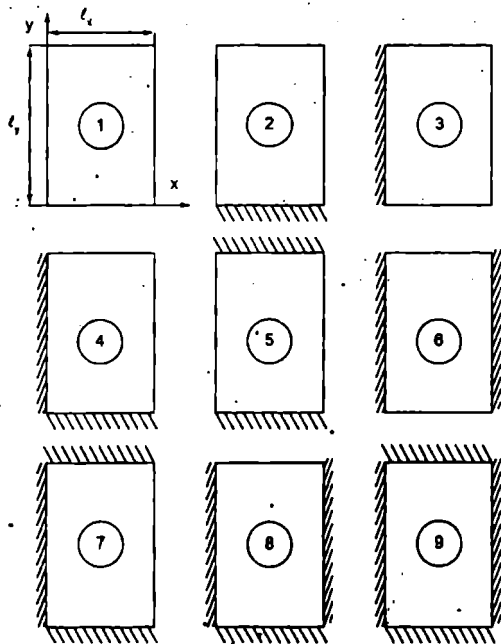


Figura 7.5 Situações de vinculação das placas isoladas constantes nos quadros.

42 Bares (1972).

## 7.3.7.2.1 DETERMINAÇÃO DE FLECHAS

A flecha (deslocamento transversal máximo de uma barra reta ou placa) para lajes com carregamento uniforme e com as condições de contorno de acordo com a Figura 7.5 é calculada pela equação 7.16 e pelos coeficientes do Quadro 7.2. A flecha encontrada é a elástica, ou seja, não estão sendo considerados os efeitos de fissuração e fluência.

$$f = \frac{p \cdot \ell_x^4}{E \cdot h^3} \cdot \frac{\alpha}{100} \quad (7.16)$$

em que:

- p – carregamento uniformemente distribuído sobre a placa;
- $\alpha$  – coeficiente tirado do Quadro 7.2;
- $\ell_x$  – menor vão da laje;
- E – módulo de deformabilidade do concreto;
- h – altura ou espessura da placa.

Para encontrar o coeficiente correto neste, e nos demais quadros, é preciso calcular o parâmetro  $\lambda$ , que reflete a geometria da laje, dado por:

$$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x} \quad (7.17)$$

sendo  $\ell_x$  a menor das dimensões da superfície da placa e  $\ell_y$ , a maior.

Para verificação do estado limite de deformação excessiva, na ABNT NBR 6118:2014, item 14.6.4.1, permite-se utilizar momento de inércia da seção bruta de concreto, com módulo de elasticidade secante do concreto. Os efeitos de fissuração e deformação lenta devem ser obrigatoriamente considerados de acordo com o item 17.3.2.1 da norma (veja as seções 4.7 e 4.8 do capítulo 4).

A introdução do efeito fissuração do concreto no cálculo da flecha a partir da equação 7.16 não é trivial; o melhor é empregar o método da grelha equivalente não linear, como apresentado por Carvalho.<sup>43</sup> Uma forma simplificada de considerar a fissuração é, conforme indicado por Moura & Marcelino,<sup>44</sup> corrigir a flecha obtida pela equação 7.16 multiplicando-a pela relação entre a inércia no estádio I e a inércia equivalente obtida de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, como visto no capítulo 4.

O momento atuante (a ser comparado com o momento de fissuração para verificação do estádio em que a seção se encontra, e para ser utilizado no cálculo da inércia equivalente), segundo o texto da norma, é o máximo momento positivo (no caso de

43 Carvalho (1994).

44 Moura & Marcelino (2003).

peças biapoiadas e contínuas); porém, com base nos resultados obtidos por Carvalho,<sup>45</sup> e mesmo conforme as recomendações de Branson,<sup>46</sup> o melhor é usar o máximo momento negativo, caso exista.

**Quadro 7.2** Coeficientes  $\alpha$  para cálculo de flechas elásticas em lajes retangulares submetidas a carregamento uniformemente distribuído.

$\lambda$	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8	Caso 9
1,00	4,67	3,20	3,20	2,42	2,21	2,21	1,81	1,81	1,46
1,05	5,17	3,61	3,42	2,67	2,55	2,31	2,04	1,92	1,60
1,10	5,64	4,04	3,63	2,91	2,92	2,41	2,27	2,04	1,74
1,15	6,09	4,47	3,82	3,12	3,29	2,48	2,49	2,14	1,87
1,20	6,52	4,91	4,02	3,34	3,67	2,56	2,72	2,24	1,98
1,25	6,95	5,34	4,18	3,55	4,07	2,63	2,95	2,33	2,10
1,30	7,36	5,77	4,35	3,73	4,48	2,69	3,16	2,42	2,20
1,35	7,76	6,21	4,50	3,92	4,92	2,72	3,36	2,48	2,30
1,40	8,14	6,62	4,65	4,08	5,31	2,75	3,56	2,56	2,37
1,45	8,51	7,02	4,78	4,23	5,73	2,80	3,73	2,62	2,45
1,50	8,87	7,41	4,92	4,38	6,14	2,84	3,91	2,68	2,51
1,55	9,22	7,81	5,00	4,53	6,54	2,86	4,07	2,73	2,57
1,60	9,54	8,17	5,09	4,65	6,93	2,87	4,22	2,87	2,63
1,65	9,86	8,52	5,13	4,77	7,33	2,87	4,37	2,78	2,68
1,70	10,15	8,87	5,17	4,88	7,70	2,88	4,51	2,79	2,72
1,75	10,43	9,19	5,26	4,97	8,06	2,88	4,63	2,81	2,76
1,80	10,71	9,52	5,36	5,07	8,43	2,89	4,75	2,83	2,80
1,85	10,96	9,82	5,43	5,16	8,77	2,89	4,87	2,85	2,83
1,90	11,21	10,11	5,50	5,23	9,08	2,90	4,98	2,87	2,85
1,95	11,44	10,39	5,58	5,31	9,41	2,90	5,08	2,89	2,88
2,00	11,68	10,68	5,66	5,39	9,72	2,91	5,19	2,91	2,91
$\infty$	15,35	15,35	6,38	6,38	15,35	3,07	6,38	3,07	3,07

45 Carvalho (1994).

46 Branson (1968).

## 7.3.7.2.2 DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS MÁXIMOS NAS DIREÇÕES X E Y

Os momentos fletores máximos, sendo os positivos designados pela letra m e os negativos pela letra x, são determinados pelas expressões 7.18 a 7.21, em que:

$\ell_x$  – menor lado da placa;

$\mu_x, \mu_y, \mu'_x$  e  $\mu'_y$  – coeficientes fornecidos nos quadros 7.3, 7.4 e 7.5.

a) momentos máximos positivos, por unidade de comprimento, nas direções x e y

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot \ell_x^2}{100} \quad (7.18)$$

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot \ell_x^2}{100} \quad (7.19)$$

b) momentos máximos negativos, por unidade de comprimento, nas direções x e y

$$x_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot \ell_x^2}{100} \quad (7.20)$$

$$x_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot \ell_x^2}{100} \quad (7.21)$$

Quadro 7.3 Coeficientes  $\mu_x, \mu_y, \mu'_x, \mu'_y$  para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 1, 2 e 3).

$\lambda$	Caso 1		Caso 2			Caso 3		
	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$
1,00	4,41	4,41	3,07	3,94	8,52	3,94	8,52	3,07
1,05	4,80	4,45	3,42	3,78	8,79	4,19	8,91	2,84
1,10	5,18	4,49	3,77	3,90	9,18	4,43	9,30	2,76
1,15	5,56	4,49	4,14	3,97	9,53	4,64	9,63	2,68
1,20	5,90	4,48	4,51	4,05	9,88	4,85	9,95	2,59
1,25	6,27	4,45	4,88	4,10	10,16	5,03	10,22	2,51
1,30	6,60	4,42	5,25	4,15	10,41	5,20	10,48	2,42
1,35	6,93	4,37	5,60	4,18	10,64	5,36	10,71	2,34
1,40	7,25	4,33	5,95	4,21	10,86	5,51	10,92	2,25
1,45	7,55	4,30	6,27	4,19	11,05	5,64	11,10	2,19

Quadro 7.3 Continuação...

$\lambda$	Caso 1		Caso 2			Caso 3		
	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_y'$	$\mu_x$	$\mu_x'$	$\mu_y$
1,50	7,86	4,25	6,60	4,18	11,23	5,77	11,27	2,12
1,55	8,12	4,20	6,90	4,17	11,39	5,87	11,42	2,04
1,60	8,34	3,14	7,21	4,14	11,55	5,98	11,55	1,95
1,65	8,62	4,07	7,42	4,12	11,67	6,07	11,67	1,87
1,70	8,86	4,00	7,62	4,09	11,79	6,16	11,80	1,79
1,75	9,06	3,96	7,66	4,05	11,88	6,24	11,92	1,74
1,80	9,27	3,91	7,69	3,99	11,96	6,31	12,04	1,68
1,85	9,45	3,83	8,22	3,97	12,03	6,38	12,14	1,64
1,90	9,63	3,75	8,74	3,94	12,14	6,43	12,24	1,59
1,95	9,77	3,71	8,97	3,88	12,17	6,47	12,29	1,54
2,00	10,00	3,64	9,18	3,80	12,20	6,51	12,34	1,48
$\infty$	12,57	3,77	9,18	3,80	12,20	7,61	12,76	1,48

Quadro 7.4 Coeficientes  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\mu_x'$ ,  $\mu_y'$  para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 4, 5 e 6).

$\lambda$	Caso 4				Caso 5			Caso 6		
	$\mu_x$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_y$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_y'$	$\mu_x$	$\mu_x'$	$\mu_y$
1,00	2,81	6,99	2,81	6,99	2,15	3,17	6,99	3,17	6,99	2,15
1,05	3,05	7,43	2,81	7,18	2,47	3,32	7,43	3,29	7,20	2,07
1,10	3,30	7,87	2,81	7,36	2,78	3,47	7,87	3,42	7,41	1,99
1,15	3,53	8,28	2,80	7,50	3,08	3,58	8,26	3,52	7,56	1,89
1,20	3,76	8,69	2,79	7,63	3,38	3,70	8,65	3,63	7,70	1,80
1,25	3,96	9,03	2,74	7,72	3,79	3,80	9,03	3,71	7,82	1,74
1,30	4,16	9,37	2,69	7,81	4,15	3,90	9,33	3,79	7,93	1,67
1,35	4,33	9,65	2,65	7,88	4,50	3,96	9,69	3,84	8,02	1,59
1,40	4,51	9,93	2,60	7,94	4,85	4,03	10,00	3,90	8,11	1,52
1,45	4,66	10,41	2,54	8,00	5,19	4,09	10,25	3,94	8,13	1,45
1,50	4,81	10,62	2,47	8,06	5,53	4,14	10,49	3,99	8,15	1,38

Quadro 7.4 Continuação...

$\lambda$	Caso 4				Caso 5			Caso 6		
	$\mu_x$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_y$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_y$	$\mu_x$	$\mu_x$	$\mu_y$
1,55	4,93	10,82	2,39	8,09	5,86	4,16	10,70	4,03	8,20	1,34
1,60	5,06	10,99	2,31	8,12	6,18	4,17	10,91	4,06	8,25	1,28
1,65	5,16	11,16	2,24	8,14	6,48	4,14	11,08	4,09	8,28	1,23
1,70	5,27	11,30	2,16	8,15	6,81	4,12	11,24	4,12	8,30	1,18
1,75	5,36	11,43	2,11	8,16	7,11	4,12	11,39	4,14	8,31	1,15
1,80	5,45	11,55	2,04	8,17	7,41	4,10	11,43	4,15	8,32	1,11
1,85	5,53	11,57	1,99	8,17	7,68	4,08	11,65	4,16	8,33	1,08
1,90	5,60	11,67	1,93	8,18	7,95	4,04	11,77	4,17	8,33	1,04
1,95	5,67	11,78	1,91	8,19	8,21	3,99	11,83	4,17	8,33	1,01
2,00	5,74	11,89	1,88	8,20	8,47	3,92	11,88	4,18	8,33	0,97
$\infty$	7,06	12,50	1,95	8,20	12,58	4,13	11,88	4,18	8,33	0,97

Quadro 7.5 Coeficientes  $\mu_x$ ,  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ ,  $\mu_y$  para o cálculo dos momentos máximos em lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 7, 8 e 9).

$\lambda$	Caso 7				Caso 8				Caso 9			
	$\mu_x$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_y$	$\mu_x$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_y$	$\mu_x$	$\mu_x$	$\mu_y$	$\mu_y$
1,00	2,13	5,46	2,60	6,17	2,60	6,17	2,13	5,46	2,11	5,15	2,11	5,15
1,05	2,38	5,98	2,66	6,46	2,78	6,47	2,09	5,56	2,31	5,50	2,10	5,29
1,10	2,63	6,50	2,71	6,75	2,95	6,76	2,04	5,65	2,50	5,85	2,09	5,43
1,15	2,87	7,11	2,75	6,97	3,09	6,99	1,98	5,70	2,73	6,14	2,06	5,51
1,20	3,11	7,72	2,78	7,19	3,23	7,22	1,92	5,75	2,94	6,43	2,02	5,59
1,25	3,43	8,81	2,79	7,36	3,34	7,40	1,85	5,75	3,04	6,67	1,97	5,64
1,30	3,56	8,59	2,77	7,51	3,46	7,57	1,78	5,76	3,13	6,90	1,91	5,68
1,35	3,76	8,74	2,74	7,63	3,55	7,70	1,72	5,75	3,25	7,09	1,86	5,69
1,40	3,96	8,88	2,71	7,74	3,64	7,82	1,64	5,74	3,38	7,28	1,81	5,70
1,45	4,15	9,16	2,67	7,83	3,71	7,91	1,59	5,73	3,48	7,43	1,73	5,71
1,50	4,32	9,44	2,63	7,91	3,78	8,00	1,53	5,72	3,58	7,57	1,66	5,72
1,55	4,48	9,68	2,60	7,98	3,84	8,07	1,47	5,69	3,66	7,68	1,60	5,72

Quadro 7.5 Continuação...

$\lambda$	Caso 7				Caso 8				Caso 9			
	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$	$\mu_x$	$\mu'_x$	$\mu_y$	$\mu'_y$
1,60	4,63	9,91	2,55	8,02	3,89	8,14	1,42	5,66	3,73	7,79	1,54	5,72
1,65	4,78	10,13	2,50	8,03	3,94	8,20	1,37	5,62	3,80	7,88	1,47	5,72
1,70	4,92	10,34	2,45	8,10	3,98	8,25	1,32	5,58	3,86	7,97	1,40	5,72
1,75	5,04	10,53	2,39	8,13	4,01	8,30	1,27	5,56	3,91	8,05	1,36	5,72
1,80	5,17	10,71	2,32	8,17	4,04	8,34	1,20	5,54	3,95	8,12	1,32	5,72
1,85	5,26	10,88	2,27	8,16	4,07	8,38	1,17	5,55	3,98	8,18	1,26	5,72
1,90	5,36	11,04	2,22	8,14	4,10	8,42	1,14	5,56	4,01	8,24	1,21	5,72
1,95	5,45	11,20	2,14	8,13	4,11	8,45	1,11	5,60	4,04	8,29	1,19	5,72
2,00	5,55	11,35	2,07	8,12	4,13	8,47	1,08	5,64	4,07	8,33	1,16	5,72
$\infty$	7,07	12,50	2,05	8,12	4,18	8,33	1,09	5,64	4,19	8,33	1,17	5,72

## 7.4 ROTEIRO PARA O CÁLCULO DE LAJES DE CONCRETO ARMADO

Na seção anterior, foi mostrado como são obtidos os esforços e os deslocamentos de lajes isoladas pelo método elástico por meio da teoria das placas delgadas, e foi dito também que o cálculo de um pavimento constituído por várias lajes, classicamente, é feito admitindo cada uma trabalhando isoladamente. Este procedimento é o que será adotado, ressaltando-se, porém, que, com processos como o de grelha equivalente ou dos elementos finitos, os pavimentos podem ser analisados como um todo.

Para o cálculo de lajes isoladas, é recomendado seguir o seguinte roteiro: determinação das condições mais adequadas de vinculação das lajes (discretização do pavimento); pré-dimensionamento das alturas das lajes; cálculo das cargas atuantes; verificação das flechas; cálculo dos momentos; determinação das armaduras longitudinais; cálculo das reações das lajes nas vigas de apoio; verificação do efeito das forças cortantes (cisalhamento); e detalhamento das armaduras.

### 7.4.1 DISCRETIZAÇÃO DO PAVIMENTO

O critério utilizado para discretizar um pavimento (separá-lo em seus elementos componentes) é considerar cada região contida entre quatro vigas como sendo uma laje (em alguns casos particulares, três vigas definem uma laje). A borda de uma laje será considerada engastada caso haja uma laje vizinha com rigidez suficiente (dependendo de seu vão ou espessura) para impedir a rotação nessa borda comum. Quando isto não ocorre, ou simplesmente a laje em estudo tem bordas que não fazem vizinhança com

outra laje, a borda é considerada com rotação livre (sem nenhum apoio) ou simplesmente apoiada.

Para esclarecer, veja os exemplos da Figura 7.6. No caso do pavimento da Figura 7.6a, para todas as lajes admite-se que seus contornos sejam engastados ou simplesmente apoiados; para as bordas comuns de L1-L2, L1-L3 e L2-L3, supõe-se que não haja rotação, enquanto para as demais bordas o giro é totalmente livre (no corte A-A, que apresenta uma seção da laje deformada, esses fatos são facilmente percebidos). Esse procedimento, indicado por Timoshenko & Woinowsky,<sup>47</sup> deve ser empregado com bom senso, pois lajes com pequenos vãos ou espessuras podem não ter rigidez suficiente para impedir a rotação da vizinha. Por exemplo, no pavimento da Figura 7.6b, a laje L4 poderá ser considerada engastada na L5, mas esta deverá ser admitida simplesmente apoiada, e não engastada na L4 (isso pode ser observado pela seção deformada dada pelo corte B-B).

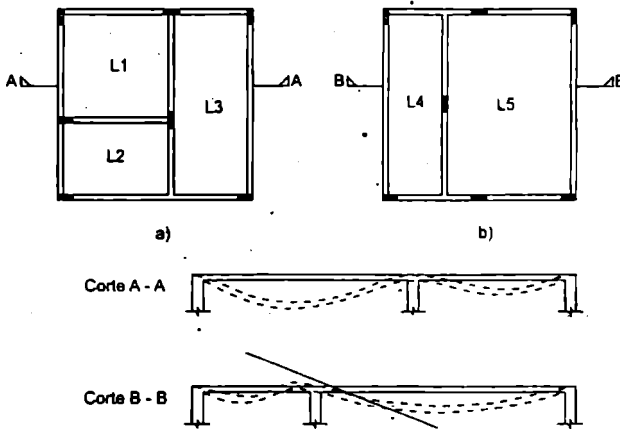


Figura 7.6 Lajes trabalhando em conjunto e rotação nos apoios.

Em situações em que não seja evidente o modo como uma borda de uma laje se vincula na vizinha, recomenda-se analisar as duas possibilidades (simplesmente apoiada e engastada) e dimensioná-la com os maiores esforços obtidos em cada situação (momentos negativos para o caso da borda considerada engastada e momentos positivos para a borda admitida como simplesmente apoiada). As situações de lajes justapostas com espessuras diferentes também devem ser analisadas com cuidado, e, se for o caso, verificar as duas possibilidades (simplesmente apoiadas e engastadas).

47 Timoshenko & Woinowsky (1959).

#### 7.4.2 PRÉ-DIMENSIONAMENTO DA ALTURA DAS LAJES

A altura final de uma laje é função da deformação limite ou do momento no estado limite último, e antes do cálculo dos esforços é necessário estimar a altura para a determinação das cargas e efetuar correções posteriores se necessário. Da mesma forma que para as vigas, na ABNT NBR 6118:2014 não existe recomendação sobre a altura inicial a ser adotada, e decidiu-se, também aqui, manter, apenas como indicação, a recomendação da ABNT NBR 6118:1980, item 4.2.3.1.C, que para vigas de seção retangular ou "T" e lajes maciças retangulares de edifícios, as condições de deformações limites estariam atendidas quando o valor da altura útil respeitar a seguinte condição:

$$d \geq \frac{\ell}{\psi_2 \cdot \psi_3} \quad (7.22)$$

em que:

$\psi_2$  – coeficiente dependente das condições de vinculação e dimensões da laje (Quadro 7.6);

$\psi_3$  – coeficiente que depende do tipo de aço (Quadro 7.7, em que foi mantido o CA32 e o CA40);

$\ell$  – menor dos dois vãos das lajes.

Com isso, o valor da altura  $h$  da laje poderá ser determinado (Figura 7.7) somando-se ao valor de  $d$ , o cobrimento  $c$  a ser considerado mais uma vez e meia o diâmetro  $\phi$  da armadura empregada ( $h = d + c + \phi + \phi/2$ ). No caso da armadura negativa, pode-se, em princípio (pelo menos na região central do apoio); usar um valor de  $d$  maior.

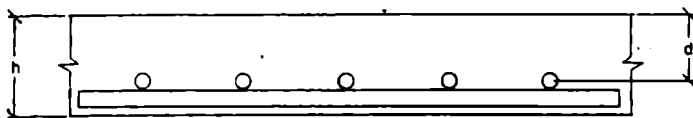


Figura 7.7 Altura total e altura útil da laje.

Como o valor dado pela expressão 7.22 é apenas indicativo (serve apenas como pré-dimensionamento), sempre será necessário proceder às verificações do estado-limite de deformação excessiva, da mesma maneira que para as vigas, de acordo com os itens 19.3.1 e 17.3.2 da ABNT NBR 6118:2014. Os procedimentos para avaliação de deslocamentos estão apresentados aqui na seção 4.8 do capítulo 4.

A ABNT NBR 6118:2014, item 13.2.4.1, estipula valores limites mínimos para a espessura de lajes maciças que devem ser respeitados:

- 7 cm para cobertura não em balanço;
- 8 cm para lajes de piso não em balanço;

- c) 10 cm para lajes em balanço;  
 d) 10 cm para lajes que suportem veículos de peso total menor ou igual a 30 kN;  
 e) 12 cm para lajes que suportem veículos de peso total maior que 30 kN;  
 f) 15 cm para lajes com protensão apoiadas em vigas, com o mínimo de  $l/42$  para lajes de piso biapoiadas e  $l/50$  para lajes de piso contínuas;  
 g) 16 cm para lajes lisas e 14 cm para lajes-cogumelo fora do capitel.

No dimensionamento das lajes em balanço, as ações devem ser multiplicadas consideradas por um coeficiente de ajustamento adicional  $\gamma_a$ , dados no Quadro 1.7 da seção 1.8.4.1 do capítulo 1.

Quadro 7.6 Valores de  $\psi_2$  utilizados no pré-dimensionamento da altura das lajes.

$\lambda$	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8	Caso 9
1,00	1,50	1,70	1,70	1,80	1,90	1,90	2,00	2,00	2,20
1,05	1,48	1,67	1,69	1,78	1,87	1,89	1,97	1,99	2,18
1,10	1,46	1,64	1,67	1,76	1,83	1,88	1,94	1,97	2,15
1,15	1,44	1,61	1,66	1,74	1,80	1,87	1,91	1,96	2,13
1,20	1,42	1,58	1,64	1,72	1,76	1,86	1,88	1,94	2,10
1,25	1,40	1,55	1,63	1,70	1,73	1,85	1,85	1,93	2,08
1,30	1,38	1,52	1,61	1,68	1,69	1,84	1,82	1,91	2,05
1,35	1,36	1,49	1,60	1,66	1,66	1,83	1,79	1,90	2,03
1,40	1,34	1,46	1,58	1,64	1,62	1,82	1,76	1,88	2,00
1,45	1,32	1,43	1,57	1,62	1,59	1,81	1,73	1,87	1,98
1,50	1,30	1,40	1,55	1,60	1,55	1,80	1,70	1,85	1,95
1,55	1,28	1,37	1,54	1,58	1,52	1,79	1,67	1,84	1,93
1,60	1,26	1,34	1,52	1,56	1,48	1,78	1,64	1,82	1,90
1,65	1,24	1,31	1,51	1,54	1,45	1,77	1,61	1,81	1,88
1,70	1,22	1,28	1,49	1,52	1,41	1,76	1,58	1,79	1,85
1,75	1,20	1,25	1,48	1,50	1,38	1,75	1,55	1,78	1,83
1,80	1,18	1,22	1,46	1,48	1,34	1,74	1,52	1,76	1,80
1,85	1,16	1,19	1,45	1,46	1,31	1,73	1,49	1,75	1,78
1,90	1,14	1,16	1,43	1,44	1,27	1,72	1,46	1,73	1,75
1,95	1,12	1,13	1,42	1,42	1,24	1,71	1,43	1,72	1,73
2,00	1,10	1,10	1,40	1,40	1,20	1,70	1,40	1,70	1,70

**Quadro 7.7** Valores de  $\psi$ , utilizados no pré-dimensionamento da altura das lajes.

Aço	Vigas e lajes nervuradas	Lajes maciças
CA25	25	35
CA32	22	33
CA40	20	30
CA50	17	25
CA60	15	20

### 7.4.3 CÁLCULO DAS CARGAS ATUANTES

As cargas atuantes em uma laje maciça (carga por metro quadrado de laje) são calculadas da maneira usual, e devem ser consideradas, geralmente, as seguintes:

- Peso próprio estrutural: multiplica-se a altura da laje pelo peso específico do concreto armado;
- Carga acidental: devem ser empregados os valores contidos na norma de ações (ABNT NBR 6120:1980), de acordo com a finalidade do edifício e do cômodo;
- Revestimento inferior: se for o caso, deve ser considerado o revestimento feito na face inferior da laje;
- Peso de contrapiso: com o intuito de se obter uma superfície nivelada do pavimento, costuma-se fazer, algum tempo após a retirada do escoramento, um enchimento com massa de regularização, que deve, assim, ser considerado como carga atuante;
- Piso ou revestimento: deve-se considerar o peso do piso, lembrando que alguns pisos, como pedras de granito, possuem um peso bastante elevado.

Todas as lajes de um piso, para efeito de cálculo, normalmente são consideradas totalmente carregadas. Quando a carga acidental for superior à metade da carga total, devem-se considerar as lajes carregadas alternadamente com a carga acidental, como pode ser visto em Timoshenko & Woinowsky e Rocha.<sup>48</sup>

### 7.4.4 VERIFICAÇÃO DAS FLECHAS

A verificação do estado limite de deformação excessiva deve ser feita para as combinações de ações de serviço, conforme visto na seção 1.8.5.2 do capítulo 1, de acordo com o item 11.8.3.1 da ABNT NBR 6118:2014. As flechas, determinadas como indicado na seção 7.3.7.2.1 deste capítulo, devem obedecer aos valores limites de deslocamentos dados no item 13.3 da norma, vistos aqui na seção 4.8.1 do capítulo 4.

<sup>48</sup> Id. *ibid.* e Rocha (1972).

Os deslocamentos não poderão atingir valores que possam resultar em danos a elementos da construção apoiados na estrutura ou situados sob elementos da mesma, prevendo-se, nestes casos, quando necessário, dispositivos adequados para evitar as consequências indesejáveis.

Na verdade, o ideal é considerar a soma dos deslocamentos das lajes com os das vigas que as sustentam, para assim verificar a deformação final da estrutura. Aqui, o deslocamento das vigas, no exemplo, será considerado de maneira aproximada.

#### 7.4.5 CÁLCULO DOS MOMENTOS

Os momentos positivos e negativos das lajes, nas direções  $x$  e  $y$ , são calculados com as equações 7.19 a 7.21 e o Quadro 7.3. É importante destacar novamente que os momentos são determinados para uma faixa unitária de laje e para lajes isoladas. Também é interessante observar que os coeficientes indicados nos quadros levam a valores extremos dos momentos, não expressando, portanto, a variação de esforços ao longo da placa.

No caso de momentos negativos em face comum às duas lajes, é usual considerar o maior valor entre a média e 80% do maior; entretanto, a favor da segurança, recomenda-se tomar, para cálculo das armaduras negativas, o maior dos dois momentos nessa face.

#### 7.4.6 DETERMINAÇÃO DAS ARMADURAS LONGITUDINAIS

O cálculo da armadura das lajes, nas direções  $x$  e  $y$ , é feito como no caso de vigas, observando-se que para a largura da seção é tomada uma faixa unitária (usualmente uma faixa de um metro), e, portanto, a armadura encontrada deve ser distribuída ao longo dessa largura.

Recomenda-se, ainda, que seja tomada como altura útil da laje a distância entre a borda comprimida superior e o centro das barras da camada superior da armadura positiva (ver Figura 7.7), pois isso acarreta um valor menor para a mesma (altura útil menor resulta área de aço maior), e a camada junto à face inferior da laje (que tem altura útil real maior) estará com uma área pouco maior que a necessária; isso garante o posicionamento correto das barras, pois na obra não é possível garantir se a armadura de cada direção será colocada na camada correta, respeitando o cálculo.

#### 7.4.7 REAÇÃO DAS LAJES NAS VIGAS

A reação das lajes nas vigas de apoio pode ser obtida utilizando-se a expressão fundamental e o processo de séries. Entretanto, não existem referências bibliográficas em que se encontre um modo prático de calcular essas reações de forma correta, conforme pode ser verificado em Mazilli.<sup>49</sup>

49 Mazilli (1988).

A ação das lajes nas vigas, no estado elástico, ocorre por meio de um carregamento com intensidade variável ao longo do seu comprimento (depende, principalmente, das condições de apoio e da relação entre os vãos), e não uniforme, o que não é simples de determinar, além de dificultar o cálculo dos esforços nas vigas.

Entretanto, de modo simplificado, pode-se considerar que a ação das lajes maciças nas vigas se faça de maneira uniforme. A ABNT NBR 6118:2014, item 14.7.6.1, traz o seguinte a respeito:

- a) As reações em cada apoio são as correspondentes às cargas atuantes nos triângulos ou trapézios determinados através das charneiras plásticas correspondentes à análise efetivada com os critérios de 14.7.4 (análise plástica), sendo que essas reações podem ser, de maneira aproximada, consideradas uniformemente distribuídas sobre os elementos estruturais que lhes servem de apoio;
- b) Quando a análise plástica não for efetuada, as charneiras podem ser aproximadas por retas inclinadas, a partir dos vértices com os seguintes ângulos:
  - 45° entre dois apoios do mesmo tipo;
  - 60° a partir do apoio considerado engastado, se o outro for considerado simplesmente apoiado;
  - 90° a partir do apoio, quando a borda vizinha for livre.

Como consequência, a laje ficará dividida em regiões, e cada uma dessas regiões carregará a viga correspondente, com carregamento admitido uniforme, de acordo com sua área de influência. A Figura 7.8 mostra dois casos de lajes com as respectivas áreas de contribuição para as vigas.

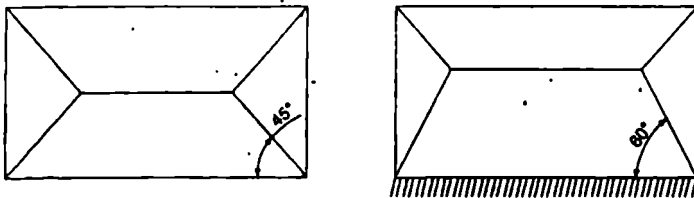


Figura 7.8 Regiões da laje para o cálculo das reações nas vigas.

Como exemplo, considere o cálculo das reações nas quatro vigas de apoio de uma laje quadrada (Figura 7.9), simplesmente apoiada, e sujeita a uma carga uniformemente distribuída  $p$ .

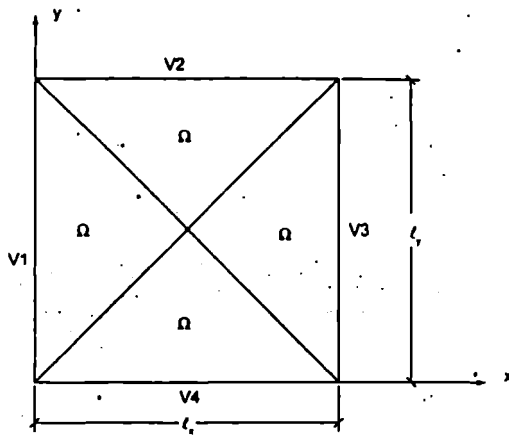


Figura 7.9 Laje quadrada apoiada nas vigas V1, V2, V3 e V4.

No caso, a laje ficou dividida em quatro partes iguais de área  $\Omega$  (área de influência), e todas as vigas receberão o mesmo carregamento; considere a viga V2.

- Área de influência:  $\Omega = \frac{l_x \cdot l_y}{4} = \frac{l_x^2}{4}$ ;
- Carga total na viga V2:  $P_{V2} = \Omega \cdot p_{\text{laje}} = \frac{l_x^2}{4} \cdot p_{\text{laje}}$ ;
- Carga distribuída nas vigas:  $p_{V2} = \frac{P_{V2}}{l_x} = \frac{l_x^2}{4 \cdot l_x} \cdot p_{\text{laje}} = 0,25 \cdot l_x \cdot p_{\text{laje}}$ ;
- Assim, em um caso geral:  $p_{V2} = k \cdot l_x \cdot p$ .

O fator  $k$  pode ser tabelado para os diversos casos de apoio das lajes e  $\lambda$  da equação 7.17, e são dados nos quadros 7.8, 7.9 e 7.10.

Com os valores de  $k$ , as reações nas vigas, para certo carregamento  $p$  e sempre com  $l_x$  sendo o menor vão, são determinadas de acordo com as equações 7.23 a 7.26 (conforme a Figura 7.10, indicando as reações nas vigas V1, V2, V3 e V4 para uma laje com duas bordas apoiadas e duas engastadas).

- Reações nas direções  $x$  e  $y$  nas vigas em bordas simplesmente apoiadas ( $q_x$ , por exemplo, refere-se a uma viga perpendicular ao eixo  $x$ ):

$$q_x = k_x \cdot p \cdot \frac{l_x}{10} \quad (7.23)$$

$$q_y = k_y \cdot p \cdot \frac{l_x}{10} \quad (7.24)$$

- Reações nas direções x e y nas vigas em bordas engastadas:

$$q_x = k_x \cdot p \cdot \frac{\ell_x}{10} \quad (7.25)$$

$$q_y = k_y \cdot p \cdot \frac{\ell_x}{10} \quad (7.26)$$

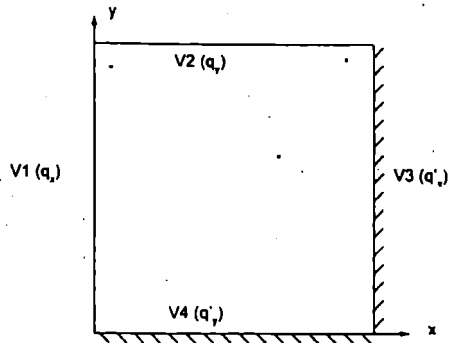


Figura 7.10 Reações nas vigas de uma laje quadrada.

Quadro 7.8 Coeficientes  $k_x, k_y, k'_x, k'_y$  para o cálculo das reações nas vigas de apoio de lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 1, 2 e 3).

$\lambda$	Caso 1		Caso 2			Caso 3		
	$k_x$	$k_y$	$k_x$	$k_y$	$k'_y$	$k'_x$	$k'_y$	$k'_x$
1,00	2,50	2,50	1,83	2,32	4,02	2,32	4,02	1,83
1,05	2,62	2,50	1,92	2,37	4,10	2,38	4,13	1,83
1,10	2,73	2,50	2,01	2,41	4,17	2,44	4,23	1,83
1,15	2,83	2,50	2,10	2,44	4,22	2,50	4,32	1,83
1,20	2,92	2,50	2,20	2,46	4,27	2,54	4,41	1,83
1,25	3,00	2,50	2,29	2,48	4,30	2,59	4,48	1,83
1,30	3,08	2,50	2,38	2,49	4,32	2,63	4,55	1,83
1,35	3,15	2,50	2,47	2,50	4,33	2,67	4,62	1,83
1,40	3,21	2,50	2,56	2,50	4,33	2,70	4,68	1,83
1,45	3,28	2,50	2,64	2,50	4,33	2,74	4,74	1,83
1,50	3,33	2,50	2,72	2,50	4,33	2,77	4,79	1,83
1,55	3,39	2,50	2,80	2,50	4,33	2,80	4,84	1,83

Quadro 7.8 Continuação...

$\lambda$	Caso 1		Caso 2			Caso 3		
	$k_x$	$k_y$	$k_x$	$k_y$	$k'_y$	$k_x$	$k'_x$	$k_y$
1,60	3,44	2,50	2,87	2,50	4,33	2,82	4,89	1,83
1,65	3,48	2,50	2,93	2,50	4,33	2,85	4,93	1,83
1,70	3,53	2,50	2,99	2,50	4,33	2,87	4,97	1,83
1,75	3,57	2,50	3,05	2,50	4,33	2,89	5,01	1,83
1,80	3,61	2,50	3,10	2,50	4,33	2,92	5,05	1,83
1,85	3,65	2,50	3,15	2,50	4,33	2,94	5,09	1,83
1,90	3,68	2,50	3,20	2,50	4,33	2,96	5,12	1,83
1,95	3,72	2,50	3,25	2,50	4,33	2,97	5,15	1,83
2,00	3,75	2,50	3,29	2,50	4,33	2,99	5,18	1,83
$\infty$	5,00	2,50	5,00	2,50	4,33	3,66	6,25	1,83

Quadro 7.9 Coeficientes  $k_x, k_y, k'_x, k'_y$  para o cálculo das reações nas vigas de apoio de lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 4, 5 e 6).

$\lambda$	Caso 4				Caso 5		Caso 6	
	$k_x$	$k'_x$	$k_y$	$k'_y$	$k_x$	$k'_y$	$k'_x$	$k_y$
1,00	1,83	3,17	1,83	3,17	1,44	3,56	3,56	1,44
1,05	1,92	3,32	1,83	3,17	1,52	3,66	3,63	1,44
1,10	2,00	3,46	1,83	3,17	1,59	3,75	3,69	1,44
1,15	2,07	3,58	1,83	3,17	1,66	3,84	3,74	1,44
1,20	2,14	3,70	1,83	3,17	1,73	3,92	3,80	1,44
1,25	2,20	3,80	1,83	3,17	1,80	3,99	3,85	1,44
1,30	2,25	3,90	1,83	3,17	1,88	4,06	3,89	1,44
1,35	2,30	3,99	1,83	3,17	1,95	4,12	3,93	1,44
1,40	2,35	4,08	1,83	3,17	2,02	4,17	3,97	1,44
1,45	2,40	4,15	1,83	3,17	2,09	4,22	4,00	1,44
1,50	2,44	4,23	1,83	3,17	2,17	4,25	4,04	1,44
1,55	2,48	4,29	1,83	3,17	2,24	4,28	4,07	1,44
1,60	2,52	4,36	1,83	3,17	2,31	4,30	4,10	1,44

Quadro 7.9 Continuação...

$\lambda$	Caso 4				Caso 5		Caso 6	
	$k_x$	$k'_x$	$k_y$	$k'_y$	$k_x$	$k'_y$	$k'_x$	$k_y$
1,65	2,55	4,42	1,83	3,17	2,38	4,32	4,13	1,44
1,70	2,58	4,48	1,83	3,17	2,45	4,33	4,15	1,44
1,75	2,61	4,53	1,83	3,17	2,53	4,33	4,17	1,44
1,80	2,64	4,58	1,83	3,17	2,59	4,33	4,20	1,44
1,85	2,67	4,63	1,83	3,17	2,66	4,33	4,22	1,44
1,90	2,70	4,67	1,83	3,17	2,72	4,33	4,24	1,44
1,95	2,72	4,71	1,83	3,17	2,78	4,33	4,26	1,44
2,00	2,75	4,75	1,83	3,17	2,84	4,33	4,28	1,44
$\infty$	3,66	6,33	1,83	3,17	5,00	4,33	5,00	1,44

Quadro 7.10 Coeficientes  $k_x$ ,  $k'_x$ ,  $k_y$ ,  $k'_y$  para o cálculo das reações nas vigas de apoio de lajes retangulares uniformemente carregadas (casos 7, 8 e 9).

$\lambda$	Caso 7			Caso 8			Caso 9	
	$k_x$	$k'_x$	$k'_y$	$k'_x$	$k_y$	$k'_y$	$k'_x$	$k'_y$
1,00	1,44	2,50	3,03	3,03	1,44	2,50	2,50	2,50
1,05	1,52	2,63	3,08	3,12	1,44	2,50	2,62	2,50
1,10	1,59	2,75	3,11	3,21	1,44	2,50	2,73	2,50
1,15	1,66	2,88	3,14	3,29	1,44	2,50	2,83	2,50
1,20	1,73	3,00	3,16	3,36	1,44	2,50	2,92	2,50
1,25	1,80	3,13	3,17	3,42	1,44	2,50	3,00	2,50
1,30	1,88	3,25	3,17	3,48	1,44	2,50	3,08	2,50
1,35	1,94	3,36	3,17	3,54	1,44	2,50	3,15	2,50
1,40	2,00	3,47	3,17	3,59	1,44	2,50	3,21	2,50
1,45	2,06	3,57	3,17	3,64	1,44	2,50	3,28	2,50
1,50	2,11	3,66	3,17	3,69	1,44	2,50	3,33	2,50
1,55	2,16	3,75	3,17	3,73	1,44	2,50	3,39	2,50
1,60	2,21	3,83	3,17	3,77	1,44	2,50	3,44	2,50
1,65	2,25	3,90	3,17	3,81	1,44	2,50	3,48	2,50

Quadro 7.10 Continuação...

$\lambda$	Caso 7			Caso 8			Caso 9	
	$k_x$	$k'_x$	$k'_y$	$k'_x$	$k'_y$	$k'_y$	$k'_x$	$k'_y$
1,70	2,30	3,98	3,17	3,84	1,44	2,50	3,53	2,50
1,75	2,33	4,04	3,17	3,87	1,44	2,50	3,57	2,50
1,80	2,37	4,11	3,17	3,90	1,44	2,50	3,61	2,50
1,85	2,40	4,17	3,17	3,93	1,44	2,50	3,65	2,50
1,90	2,44	4,21	3,17	3,96	1,44	2,50	3,68	2,50
1,95	2,47	4,28	3,17	3,99	1,44	2,50	3,72	2,50
2,00	2,50	4,33	3,17	4,01	1,44	2,50	3,75	2,50
$\infty$	3,66	6,34	3,17	5,00	1,44	2,50	5,00	2,50

### 7.4.8 VERIFICAÇÃO DE LAJES AO CISALHAMENTO

As placas, de maneira geral, e as lajes (placas de concreto armado), em particular, fazem parte de um grupo de elementos estruturais (blocos, sapatas, consolos curtos, vigas-parede etc.) cujo comportamento, em relação aos esforços cortantes, difere substancialmente do apresentado pelas vigas. As lajes conseguem mobilizar um esquema de resistência ao esforço cortante fazendo com que seu efeito não seja crítico, e geralmente apenas o concreto é suficiente para resisti-lo; armaduras transversais só são necessárias em situações especiais.

As recomendações da ABNT NBR 6118:2014 para a verificação do efeito da força cortante em lajes (maciças e nervuradas com espaçamento entre nervuras menor ou igual a 65 cm) e em elementos lineares com  $b_w \geq 5 \cdot d$  encontram-se no item 19.4. Duas situações são previstas: lajes sem armadura para força cortante e lajes com armadura para força cortante. Serão apresentadas as prescrições referentes às lajes submetidas à flexão simples.

#### 7.4.8.1 Lajes sem armadura para força cortante

As recomendações encontram-se no item 19.4.1 da norma, em que se permite prescindir da armadura transversal para resistir aos esforços de tração devidos à força cortante, desde que os requisitos de ancoragem estejam satisfeitos conforme o item 9.4.5, se a força cortante solicitante de cálculo ( $V_{sd}$ ) for menor ou igual à resistência de projeto ao cisalhamento ( $V_{Rd1}$ ), ou seja:

$$V_{sd} \leq V_{Rd1} = [\tau_{Rd} \cdot k \cdot (1,2 + 40 \cdot \rho_1) + 0,15 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \quad (7.27)$$

em que:

- $\tau_{Rd} = 0,25 \cdot f_{ctd} = 0,25 \cdot f_{ctk,inf} / \gamma_c$  (veja seção 1.6.2.4, equações 1.5 e 1.6);
- $k = 1$  para elementos em que 50% da armadura inferior não chegam até ao apoio;
- $k = (1,6 - d) \geq 1$ , com  $d$  em metros, para os demais casos;
- $\rho_t = \frac{A_{st}}{b_w \cdot d} \leq 0,02$ ;
- $A_{st}$  é a área da armadura de tração que se estende no mínimo até  $d - \ell_{b,nec}$  além da seção considerada, sendo  $\ell_{b,nec}$  o comprimento de ancoragem necessário definido no item 9.4.2.5 da norma e de acordo com a Figura 7.11 a seguir;
- $\sigma_{cp} = N_{Sd} / A_c$  ( $N_{Sd}$  é a força longitudinal na seção devida à protensão ou carregamento);
- $b_w$  é a largura mínima da seção ao longo da altura útil  $d$ .

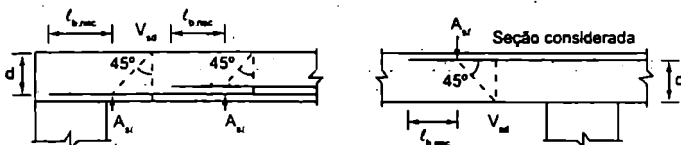


Figura 7.11 Comprimento de ancoragem necessário (Figura 19.1 da ABNT NBR 6118:2014).

A verificação da compressão diagonal do concreto (bielas comprimidas), em elementos sem armadura de cisalhamento, é feita comparando-se a força cortante solitante de cálculo  $V_{Sd}$  com a resistência de cálculo  $V_{Rd2}$ , dada por:

$$V_{Rd2} = 0,5 \cdot \alpha_{v1} \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot 0,9 \cdot d \quad (7.28)$$

em que:

$$\alpha_{v1} = (0,7 - f_{ck}/200) \leq 0,5 \quad (f_{ck} \text{ em MPa});$$

$$f_{ctd} = f_{ctk} / \gamma_c = f_{ctk} / 1,4 \text{ é a resistência de cálculo do concreto.}$$

#### 7.4.8.2 Lajes com armadura para força cortante (item 19.3.2)

Neste caso, aplicam-se os critérios estabelecidos em 17.4.2, que trata da verificação do estado último de cisalhamento em elementos lineares (são apresentados dois modelos de cálculo, dependentes da inclinação adotada para as bielas comprimidas, conforme visto no capítulo 6), com as seguintes determinações complementares:

- Somente para lajes com espessura superior a 35 cm pode ser usada a resistência dos estribos  $f_{ywd} = 435$  MPa;
- Para lajes com espessura até 15 cm, essa resistência deve ser limitada a 250 MPa;
- Permite-se interpolar linearmente entre esses 2 valores.

### 7.4.9 ABERTURAS EM LAJES

De maneira geral, quando forem previstos furos e aberturas em elementos estruturais, seu efeito na resistência e na deformação deve ser verificado. Considera-se que os furos têm dimensões pequenas em relação ao elemento estrutural, enquanto as aberturas não, e um conjunto de furos muito próximos deve ser tratado como uma abertura.

No caso de aberturas em lajes, de acordo com o item 21.3.4 da ABNT NBR 6118:2014, as seguintes condições devem ser respeitadas em qualquer situação:

- A seção do concreto remanescente, da parte central ou sobre o apoio da laje, deve ser capaz de equilibrar os esforços no estado limite último correspondentes a essa seção sem aberturas;
- As seções das armaduras interrompidas devem ser substituídas por seções equivalentes de reforço devidamente ancoradas.

Ainda na seção 13.2.5.2 da ABNT NBR 6118:2014, que trata de aberturas que atravessam lajes na direção de sua espessura, considera-se que nas lajes armadas em duas direções, exceto as lisas e cogumelo, a verificação de resistência e deformação poderá ser dispensada se forem observadas, simultaneamente, as seguintes condições (Figura 7.12):

- Se a dimensão da abertura, normal ao plano médio da laje, não ultrapassar  $1/10$  do menor vão ( $\ell_x$ ) em cada direção da armadura;
- Se não houver entre as faces de duas aberturas adjacentes distância inferior à metade do menor vão;
- A distância entre a face de uma abertura e uma borda livre da laje não deve ser menor que  $1/4$  do vão na direção considerada.

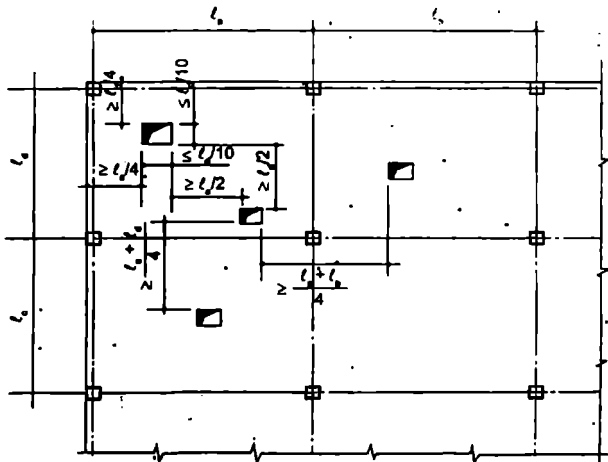


Figura 7.12 Dimensões limites para aberturas em lajes em que são dispensadas verificações.

$$n = \frac{A_s}{A_{s\sigma}} \quad (7.30)$$

e o espaçamento será a largura unitária (1-m) dividida pelo número de barras:

$$s = \frac{1\text{m}}{n} = \frac{1}{\frac{A_s}{A_{s\sigma}}} = \frac{1(\text{m}) \cdot A_{s\sigma}(\text{cm}^2)}{A_s(\text{cm}^2)} = \frac{A_{s\sigma}}{A_s}(\text{m}) \quad (7.31)$$

ou seja, para determinar o espaçamento  $s$  das barras, basta dividir a área da barra escolhida pela área total de armadura, por metro de laje, encontrada.

#### 7.4.11.2 Armaduras longitudinais máximas e mínimas

As quantidades mínima e máxima de armaduras longitudinais em lajes seguem o mesmo princípio básico apresentado para os elementos lineares, segundo o item 17.3.5.1 da norma. Além disso, como as lajes armadas em duas direções têm outros mecanismos resistentes, os valores mínimos das armaduras positivas são reduzidos em relação aos dos elementos lineares.

##### a) Armaduras mínimas

Segundo o item 19.3.3.2 da norma, a armadura mínima em lajes tem a função de melhorar o desempenho e a ductilidade à flexão e punção, bem como controlar a fissuração. Ela deve ser constituída preferencialmente por barras com alta aderência ( $\eta_b \geq 1,5$ ) ou por telas soldadas. Os valores mínimos de armadura passiva aderente devem atender a:

- Armaduras negativas:  $\rho_s \geq \rho_{\min}$ ;
- Armaduras positivas de lajes armadas nas duas direções:  $\rho_s \geq 0,67 \cdot \rho_{\min}$ ;
- Armadura positiva (principal) de lajes armadas em uma direção:  $\rho_s \geq \rho_{\min}$ ;

em que  $\rho_s = \frac{A_s}{b_w \cdot h}$  é a porcentagem de armadura passiva aderente (se  $A_s$  for por metro

de laje, a largura  $b$  será igual a um metro) e  $\rho_{\min}$ , o valor dado no Quadro 4.2 do capítulo 4 (Tabela 17.3 da norma), correspondente ao concreto adotado.

##### b) Armaduras máximas

A armadura máxima de flexão em lajes é prescrita pela ABNT NBR 6118:2014 no item 19.3.3.3, a qual indica que deve ser respeitado o limite dado no item 17.3.5.2.4 transcrito na seção 4.2.2 do capítulo 4.

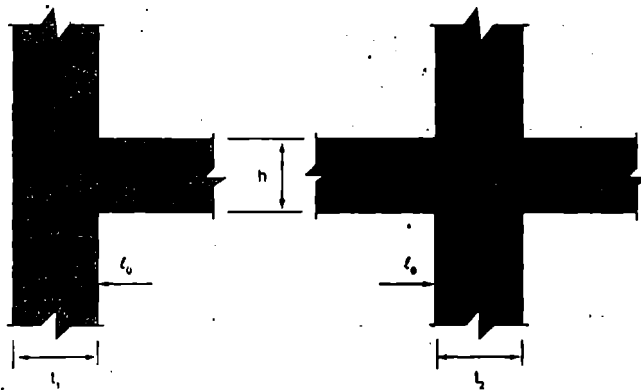
#### 7.4.10 VÃOS EFETIVOS DE LAJES E PLACAS

Quando os apoios das lajes puderem ser considerados suficientemente rígidos quanto à translação vertical, o vão efetivo a ser utilizado para as lajes deve ser calculado, segundo os itens 14.7.2.2 e 14.6.2.4 da ABNT NBR 6118:2014, por:

$$\ell_{ef} = \ell_0 + a_1 + a_2 \quad (7.29)$$

em que (Figura 7.13):

- $\ell_0$  é a distância entre as faces internas de dois apoios consecutivos;
- $a_1$  é o menor valor entre  $t_1/2$  e  $0,3 \cdot h$ ;
- $a_2$  é o menor valor entre  $t_2/2$  e  $0,3 \cdot h$ .



a) Apoio de vão extremo

b) Apoio de vão intermediário

Figura 7.13 Vão efetivo em lajes (Figura 14.5 da ABNT NBR 6118:2014).

#### 7.4.11 DETALHAMENTO DAS ARMADURAS

Nos próximas seções serão apresentadas as recomendações da ABNT NBR 6118:2014, e outras pertinentes, para o detalhamento das armaduras longitudinais positiva e negativa em lajes maciças de concreto armado, destacando que as armaduras devem ser dispostas de forma a garantir seu posicionamento durante a concretagem, principalmente das barras negativas.

##### 7.4.11.1 Espaçamento entre barras

É preciso, inicialmente, para uma determinada área necessária de aço  $A_s$  ( $\text{cm}^2/\text{m}$ ), por unidade de largura da laje, determinar o espaçamento ( $s$ ) entre as barras, para uma barra escolhida de área  $A_b$  ( $\text{cm}^2$ ). A quantidade  $n$  de barras por metro de laje é:

### 7.4.11.3 Armadura de distribuição e secundária de flexão

A quantidade de armadura positiva de distribuição (secundária) de lajes armadas em uma direção, segundo a Tabela 19.1 da norma, tendo  $\rho$ , o mesmo significado anterior, deve atender a:

- $(A_s/s) \geq 20\%$  da armadura principal e  $0,9 \text{ cm}^2/\text{m}$ ;
- $\rho_s \geq 0,5 \cdot \rho_{\min}$ .

Em lajes armadas em duas direções, a armadura secundária de flexão, por metro de largura da laje, segundo o item 20.1 da norma, deve ter área igual ou superior a 20% da área da armadura principal, mantendo-se, ainda, um espaçamento entre barras de, no máximo, 33 cm. A emenda dessas barras, se necessária, deve respeitar os mesmos critérios de emenda das barras da armadura principal, que por sua vez seguem as recomendações referentes às vigas.

### 7.4.11.4 Espaçamento e diâmetro máximo

O espaçamento máximo ( $s$ ) entre as barras da armadura principal de flexão, na região dos maiores momentos fletores (item 20.1 da ABNT NBR 6118:2014), deve respeitar simultaneamente os dois limites seguintes, sendo  $h$  a espessura da laje:

$$s \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ 2 \cdot h \end{cases}$$

O diâmetro máximo de qualquer barra da armadura de flexão, também segundo o item 20.1 da norma, deve ser:  $\phi_{\max} \leq h/8$ .

### 7.4.11.5 Quantidade e comprimentos mínimos de armaduras em bordas livres e aberturas

Em bordas livres e junto às aberturas das lajes, as armaduras interrompidas devem respeitar a quantidade, os comprimentos mínimos e o detalhamento estabelecidos no item 20.2 da norma, de acordo com a Figura 7.14.

### 7.4.11.6 Armadura de tração sobre os apoios

Esta recomendação não foi mantida na versão final da ABNT NBR 6118:2014, mas julgou-se interessante manter o que prescrevia a ABNT NBR 6118:1980, no item 3.3.2.7, sobre a armadura negativa sobre os apoios.

Quando não se determinar o diagrama exato dos momentos negativos em lajes retangulares de edifícios com carga distribuída e  $q \leq g$ , as barras da armadura principal sobre os apoios deverão estender-se de acordo com o diagrama de momentos (considerado já deslocado) de base igual ao valor indicado:

a) lajes atuando em duas direções ortogonais

- Em uma borda engastada: 0,25 do menor vão, sendo cada uma das outras três bordas livremente apoiada ou engastada.
- Nos dois lados de um apoio de laje contínua: 0,25 do maior dos vãos menores das lajes contíguas.

b) lajes atuando em uma direção

- Em uma borda engastada: 0,25 do vão.

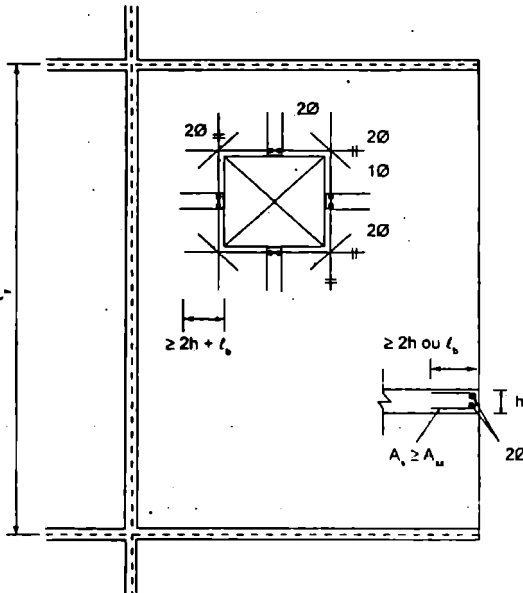


Figura 7.14 Armaduras em bordas livres e aberturas (Figura 20.1 da ABNT NBR 6118:2014).

#### 7.4.11.7 Armadura nos cantos de lajes retangulares e outras recomendações

No projeto de revisão da ABNT NBR 6118, versão de 1999, havia recomendações sobre a colocação de armadura nos cantos das lajes para combater os momentos volventes, e também eram apresentadas diversas possibilidades para arranjo das armaduras longitudinais de flexão quando não se conhecia a distribuição de momento. Na ABNT NBR 6118:2014, item 20.1, o assunto é tratado da seguinte forma: "Nas lajes maciças armadas em uma ou em duas direções, em que seja dispensada armadura transversal de acordo com 19.4.1, e quando não houver avaliação explícita dos acréscimos das armaduras decorrentes da presença de momentos volventes nas lajes, toda a armadura positiva deve ser levada até os apoios, não se permitindo escalonamento desta armadura. A armadura deve ser prolongada no mínimo 4 cm além do eixo teórico do apoio". O item 19.4.1 trata das lajes sem armadura para força cortante.

Dessa forma, recomenda-se, portanto, quando o diagrama de momentos não for determinado e nem os acréscimos de armadura decorrentes dos momentos volventes, que em lajes de edificações correntes as armaduras positivas sejam colocadas com comprimento igual ao do vão em cada direção, pois embora acarrete uma quantidade maior de aço, facilita a execução e diminui a possibilidade de erros na montagem da armadura. Nas barras da armadura longitudinal positiva das lajes, não devem ser utilizados ganchos.

É importante destacar que no item 19.2, nas considerações do estado limite último para o cálculo de lajes, a ABNT NBR 6118:2014 recomenda: "Na determinação dos esforços resistentes das seções de lajes submetidas a esforços normais e momentos fletores, devem ser usados os mesmos princípios estabelecidos em 17.2.1 a 17.2.3". Os itens 17.2.1 a 17.2.3 tratam das prescrições para o cálculo no estado limite último de elementos lineares sujeitos a solicitações normais.

Nas regiões de apoio das lajes, também de acordo com o item 19.2 da norma, devem ser garantidas boas condições de ductilidade, atendendo-se às disposições descritas no capítulo 3.

Ainda no item 19.2 há esta indicação: "Quando, na seção crítica adotada para dimensionamento, a direção das armaduras diferir das direções das tensões principais em mais de 15°, esse fato deve ser considerado no cálculo das armaduras". No caso de placas retangulares considerando-se as seções de apoio e do meio do vão, em geral essa condição está atendida.

Por fim, no item 14.6.6.3 da norma há a indicação de que, para estruturas de edifícios em que a carga variável seja de até 5 kN/m<sup>2</sup> e que seja no máximo igual a 50% da carga total, a análise estrutural pode ser realizada sem a consideração de alternância de cargas. Isto significa dizer que o pavimento pode ser carregado em sua totalidade com carga uniforme, sem considerar, por exemplo, uma laje com a carga contígua e a subsequente com carga.

### Exemplo 1

Calcular e detalhar a armadura do pavimento de lajes maciças cuja planta de formas está indicada na Figura 7.15. Considerar que as salas serão utilizadas para escritórios, que todas as lajes deverão ter a mesma espessura e que o revestimento inferior de gesso, para efeito de cálculo de carga, pode ser desprezado. Serão admitidos os seguintes dados de projeto:

- Contrapiso com espessura de 2,0 cm e  $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$ ;
- Piso de plástico, cujo peso de 0,20 kN/m<sup>2</sup> já inclui a cola e a camada de regularização;

- Cobrimento nominal da armadura de 25 mm, admitindo classe de agressividade ambiental II;
- Vigas: largura  $b_w = 12$  cm e altura  $h = 50$  cm;
- Concreto com resistência característica  $f_{ck} = 20$  MPa;
- Aço CA50;
- O escoramento será retirado 14 dias após a execução da concretagem.

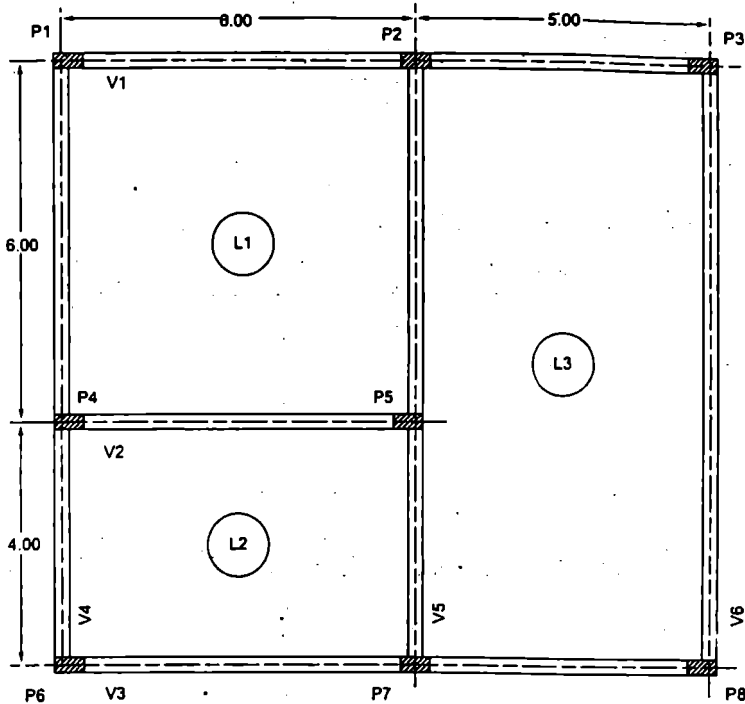


Figura 7.15 Planta de fôrmas do pavimento do exemplo 1.

#### a) Esquema estrutural das lajes

As lajes L1, L2 e L3 do pavimento são consideradas isoladas, com o esquema estrutural de acordo com a Figura 7.16. As lajes L1 e L2, com duas bordas adjacentes engastadas e as outras duas simplesmente apoiadas, são do tipo 4, enquanto a laje L3, engastada em um dos lados maiores e com apoio simples nos demais, é do tipo 3.

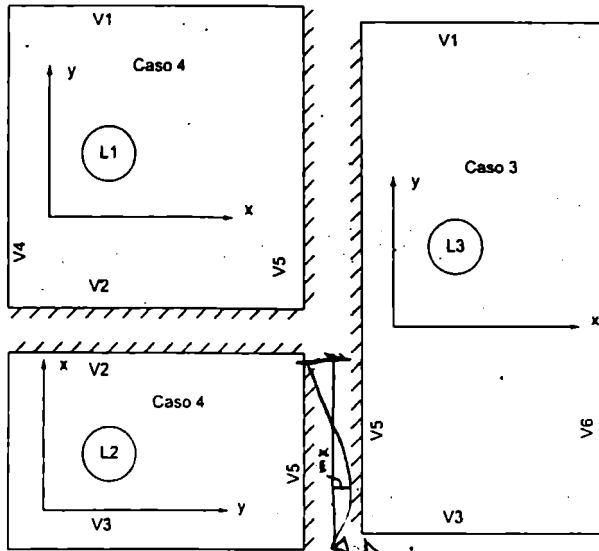


Figura 7.16 Esquema estrutural das lajes do pavimento.

b) Pré-dimensionamento da altura das lajes

O pré-dimensionamento da altura das lajes será feito de acordo com a ABNT NBR 6118:1980 (item 4.2.3.1), com os valores de  $\psi_2$  segundo o Quadro 7.6 e  $\psi_3 = 25$  (CA50, laje maciça, Quadro 7.7), e com

$$d \geq \frac{\ell}{\psi_2 \cdot \psi_3}$$

a altura útil inicial das lajes e a altura total são determinadas. A altura da laje foi obtida, para o caso de armadura positiva, somando ao valor da altura útil encontrado o cobrimento (2,5 cm) mais uma vez e meia o diâmetro da barra longitudinal (Figura 7.7). Admitindo inicialmente barras de  $\phi$  10 mm, resulta:

$$h = d + 2,5 + 1,5 \cdot 1,0 = d + 4,0 \text{ cm} = d + 0,04 \text{ m}$$

Os valores podem ser mais bem organizados colocando-os em um quadro, conforme a seguir.

Laje	Caso	$\ell_x$	$\ell_y$	$\lambda$	$\psi_2$	$\psi_3$	d (m)	h (m)
L1	4	6,00	6,00	1,00	1,80	25	0,133	0,173
L2	4	4,00	6,00	1,50	1,60	25	0,100	0,14
L3	3	5,00	10,00	2,00	1,40	25	0,143	0,183

Pelos resultados, a maior altura necessária é de 18,3 cm. É possível empregar uma altura menor que a encontrada e verificar se a mesma atende às limitações de flecha impostas pela norma; caso contrário, aumenta-se novamente a altura. Como as três lajes devem ter a mesma altura, adota-se:

$$d = 12 \text{ cm e } h = 16,0 \text{ cm}$$

### c) Cálculo das cargas atuantes

#### c1) Cargas permanentes

peso próprio:	$g_1 = 0,16 \cdot 25 \text{ kN/m}^3 =$	4,00 kN/m <sup>2</sup>
contrapiso:	$g_2 = 0,02 \cdot 18 \text{ kN/m}^3 =$	0,36 kN/m <sup>2</sup>
piso:	$g_2 =$	<u>0,20 kN/m<sup>2</sup></u>
Total:	$g = g_1 + g_2 + g_2 =$	4,56 kN/m <sup>2</sup>

#### c2) Carga acidental

Salas para escritório (ABNT, NBR 6120:1980):  $q = 2,00 \text{ kN/m}^2$ .

#### c3) Carga para a combinação quase permanente

A combinação quase permanente, necessária na verificação do estado limite de deformações excessivas, é obtida considerando-se as cargas permanentes mais a parcela de  $\psi_1 = 0,4$  da carga acidental (valor que pode ser empregado para escritórios, que é o caso aqui).

$$p = g + q = 4,56 + 0,4 \cdot 2,00 = 5,36 \text{ kN/m}^2$$

#### c4) Carga total

A carga total, necessária para o dimensionamento no estado limite último, será calculada depois de efetuadas as verificações dos deslocamentos e definida a altura final das lajes.

### d) Verificação das flechas

As flechas serão calculadas sem os efeitos da fissuração, mas considerando o efeito da fluência do concreto. Para levar em conta a deformação das vigas (seção 7.4.4), as flechas limites usadas para as lajes serão uma parcela das prescritas pela norma, admitindo que a parcela restante das flechas ocorrerá nas vigas. Assim, se um ponto do pavimento atinge o deslocamento limite, será admitido que esse deslocamento se dê com dois terços ocorrendo na laje e um terço nas vigas de suporte da laje. Dessa forma, o deslocamento máximo da laje deve ser inferior a 2/3 do limite prescrito pela norma. Os deslocamentos serão verificados em relação aos limites de aceitabilidade sensorial (seção 4.8.1).

#### d1) Valores limites dos deslocamentos

Os deslocamentos máximos (flechas), calculados para a combinação quase permanente e para carga acidental, deverão atender aos limites dados no Quadro 4.7 do capítulo 4.

Como de fato há o deslocamento da laje e também das vigas de apoio, será considerado como limite para a laje o valor de 2/3 do limite total (laje mais vigas) estabelecido. Os limites, em que  $l$  é o menor vão da laje considerada, são:

- Para a combinação quase permanente (considerando a fluência) para os dois elementos (vigas mais laje):  $l/250$ ; somente para laje:  $(2/3) \cdot (l/250) = l/375$ ;
- Para apenas a carga acidental para os dois elementos (vigas mais laje):  $l/350$ ; somente para laje:  $(2/3) \cdot (l/350) = l/525$ .

Os valores limites para cada situação de carregamento e para cada uma das lajes estão no quadro seguinte:

Laje	$l_i$ (cm)	Flechas limites (cm)	
		Combinação quase permanente	Carga acidental
L1	600	1,60	1,14
L2	400	1,07	0,76
L3	500	1,33	0,95

d2) Módulo de deformação longitudinal do concreto (ABNT NBR 6118:2014, item 8.2.8)

O módulo de elasticidade secante, a ser utilizado nas verificações de estados limites de serviço, deve ser calculado pelas expressões 1.9 e 1.11, capítulo 1, para concretos de classe até C50 e agregados de granito, com os valores em MPa.

$$E_{cs} = 0,85 \cdot E_c = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} = 4760 \cdot \sqrt{20} = 21287 \text{ MPa} = 21287000 \text{ kN} / \text{m}^2$$

d3) Cálculo da flecha elástica

No cálculo da flecha elástica, não se considera o efeito da fissuração do concreto.

$$f = \frac{p \cdot l^4}{E \cdot h^3} \cdot \frac{\alpha}{100}$$

com  $\alpha$  dado no Quadro 7.2 e  $E \cdot h^3 = 21287000 \text{ (kN/m}^2) \cdot 0,16^3 \text{ (m)} = 87191,6 \text{ kNm}$ .

- Flecha para a carga obtida com a combinação quase permanente

$$f_{g+q} = \frac{(g_1 + g_2 + \psi_1 \cdot q) \cdot l^4}{E \cdot h^3} \cdot \frac{\alpha}{100} = \frac{(4,56 + 0,4 \cdot 2,0) \cdot l^4}{87191,6} \cdot \frac{\alpha}{100} = 6,15 \cdot 10^{-7} \cdot \alpha \cdot l^4$$

- Flecha para ação apenas da carga acidental

$$f_q = \frac{q \cdot \ell_x^4}{E \cdot h^3} \cdot \frac{\alpha}{100} = \frac{2,0 \cdot \ell_x^4}{87191,6} \cdot \frac{\alpha}{100} = 2,29 \cdot 10^{-7} \cdot \alpha \cdot \ell_x^4$$

• Consideração da fluência

O cálculo do efeito da fluência também será feito com a carga obtida da combinação quase permanente, e com as equações da seção 4.8.2.4.

O tempo  $t_0$  é a idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração, no caso 14 dias, e, a favor da segurança, considerou-se que todas as ações atuarão após a retirada do escoramento, nessa data:

$$t_0 = 14/30 = 0,47$$

Os coeficientes  $\xi$  para as idades  $t_0 = 0,47$  e para o tempo infinito são:

$$\xi(t_0) = 0,68 \cdot 0,996^{t_0} \cdot t_0^{0,32} = 0,68 \cdot 0,996^{0,47} \cdot 0,47^{0,32} = 0,53;$$

$$\xi(\infty) = 2 \text{ (valor fixo para idade maior que 70 meses).}$$

Como não há armadura comprimida, então  $\rho' = 0$ , resultando para o fator  $\alpha_f$ :

$$\alpha_f = \frac{\Delta \xi}{1 + 50 \cdot \rho'} = \frac{2 - 0,53}{1} = 1,47$$

O valor da flecha total no tempo infinito será aquela correspondente à combinação quase permanente multiplicada por  $(1 + \alpha_f)$ :

$$f_{\text{total},\infty} = f_{\text{imediate}} \cdot (1 + 1,47) = f_{\text{imediate}} \cdot 2,47$$

Os valores das flechas estão apresentados no quadro a seguir:

Laje	Caso	$\ell_x$ (m)	$\lambda$	$\alpha$	$\alpha \cdot \ell_x^4$	$f_{\text{imediate}}$ $g_1 + g_2 + \psi_1 \cdot q$	Flechas elásticas e limites (cm)			
							$f_{\text{total},\infty}$	$f_{\text{total,lim}}$	$f_q$	$f_{q,\text{lim}}$
L1	4	6,0	1,0	2,42	3136	0,19	0,47	1,60	0,07	1,14
L2	4	4,0	1,5	4,38	1121	0,06	0,15	1,07	0,02	0,76
L3	3	5,0	2,0	5,66	3537	0,22	0,55	1,33	0,08	0,95

d4) Determinação de uma nova altura para as lajes

Observa-se que as flechas de cada laje são bem menores que as limites, sendo possível, dessa maneira, diminuir a altura das lajes. Igualando a maior das flechas das lajes (flecha de L3 para a situação  $g_1 + g_2 + \psi_1 \cdot q$ ) com a flecha limite correspondente, em metros, obtém-se uma nova altura, destacando que a flecha calculada de acordo com a seção

7.3.7.2.1 (equação 7.16) é imediata, e deve ser multiplicada por 2,47 devido ao efeito da fluência:

$$\frac{(g_1 + g_2 + \psi_1 \cdot q) \cdot \ell_x^4}{E \cdot h^3} \cdot \frac{\alpha}{100} \cdot 2,47 = 0,0133 \rightarrow \frac{(5,36) \cdot 5^4}{21287000 \cdot h^3} \cdot \frac{5,66}{100} \cdot 2,47 = 0,0133$$

$$h^3 = \frac{(5,36) \cdot 5^4 \cdot 2,47}{21287000 \cdot 0,0133} \cdot \frac{5,66}{100} \rightarrow h = 0,118\text{m} = 11,8\text{cm}$$

Como  $h = d + 2,5 + 1,5 \cdot 1,0 = d + 4,0$  cm, pode-se adotar:

$h = 12,0$  cm e  $d = 8,0$  cm para a armadura positiva;

$d = 9,0$  cm para a armadura negativa, que é mais solicitada.

d5) Determinação do carregamento total

A carga total sobre a laje deve ser calculada para a nova altura de 12 cm.

$$p = 0,12 \text{ m} \cdot 25 \text{ kN/m}^3 + 0,36 \text{ kN/m}^2 + 0,20 \text{ kN/m}^2 + 2,0 \text{ kN/m}^2 = 5,56 \text{ kN/m}^2$$

d6) Valores finais das flechas

Não é preciso nova verificação, pois a carga final devida à combinação quase permanente é menor que a anterior, que havia sido calculada para uma altura de 16 cm.

e) Cálculo dos momentos fletores atuantes nas lajes

Serão calculados os momentos fletores para a carga total  $p = 5,56 \text{ kN/m}^2$ , verificada a altura útil mínima, feitas as correções necessárias, e calculados a altura e momentos finais.

e1) Determinação dos momentos

Os momentos máximos positivo e negativo, nas lajes, por unidade de comprimento (faixa unitária), são calculados por meio das expressões 7.18 a 7.21, com os coeficientes  $\mu_x, \mu_y, \mu'_x$  e  $\mu'_y$  fornecidos nos quadros 7.3, 7.4 e 7.5.

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot \ell_x^2}{100} \quad m_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot \ell_y^2}{100} \quad x_x = \mu'_x \cdot \frac{p \cdot \ell_x^2}{100} \quad x_y = \mu'_y \cdot \frac{p \cdot \ell_y^2}{100}$$

O cálculo dos momentos (kNm/m) fica mais bem organizado em um quadro:

Laje	Caso	$\ell_x$	$\lambda$	$p$ (kN/m <sup>2</sup> )	$p\ell_x^2$	$\mu_x$	$m_x$	$\mu_y$	$m_y$	$\mu'_x$	$x_x$	$\mu'_y$	$x_y$
L1	4	6,00	1,00	5,56	200	2,81	5,62	2,81	5,62	6,99	14,00	6,99	14,00
L2	4	4,00	1,50	5,56	89	4,81	4,28	2,47	2,20	10,62	9,45	8,06	7,17
L3	3	5,00	2,00	5,56	139	6,51	9,05	1,48	2,06	12,34	17,15	-	-

**e2) Determinação da altura útil mínima**

O cálculo será efetuado conforme visto no estudo de seções retangulares sob flexão normal (capítulo 3, expressão 3.43) e, no caso, para uma faixa de laje de largura unitária (1,0 m).

- Armadura positiva, com:  $m = 9,05 \text{ kNm/m}$  (máximo momento positivo atuante no pavimento, ou seja, momento na laje L3);  $b_w = 1,0 \text{ m}$ ;  $f_{cd} = 20000 \text{ kN/m}^2$ .

$$d_{\min} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd}}} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{1,4 \cdot 9,05}{1,0 \cdot 20000 / 1,4}} = 0,060 \text{ m}$$

$d_{\min} = 0,060 \text{ m} = 6,0 \text{ cm} < \text{que } d = 8,0 \text{ cm}$  adotado para a armadura positiva.

- Armadura negativa, com:  $m = 17,15 \text{ kNm/m}$  (máximo momento negativo atuante no pavimento, ou seja, momento na laje L3);  $b_w = 1,0 \text{ m}$ ;  $f_{cd} = 20000 \text{ kN/m}^2$ .

$$d_{\min} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd}}} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{1,4 \cdot 17,15}{1,0 \cdot 20000 / 1,4}} = 0,082 \text{ m}$$

$d_{\min} = 0,082 \text{ m} = 8,2 \text{ cm} < \text{que } d = 9,0 \text{ cm}$  adotado para a armadura negativa.

**f) Cálculo das armaduras longitudinais**

Para o cálculo da armadura positiva das lajes existem duas alturas úteis, uma para cada direção, conforme pode ser visto na Figura 7.17, para as direções s e v. Recomenda-se, entretanto, que seja tomada como altura útil da laje a distância entre a borda comprimida superior e o centro das barras da camada superior da armadura positiva (no caso,  $d_s$ , que é menor que  $d$ ), possibilitando que, na construção, as barras de cada direção sejam posicionadas em qualquer uma das camadas. Assim, será empregada no cálculo de todas as armaduras altura útil igual a 8,0 cm, determinada anteriormente; no caso das armaduras negativas, esse valor está a favor da segurança.

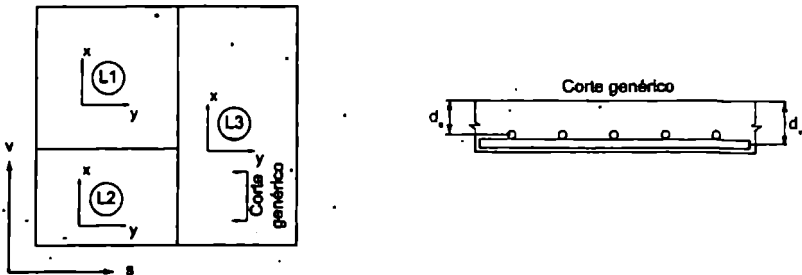


Figura 7.17 Direções s e v e as respectivas alturas úteis.

O cálculo da armadura é feito da mesma maneira que em vigas retangulares sob flexão simples para uma faixa de laje de largura igual a 1,0 m. Como para as armaduras positivas e negativas a altura útil é maior que a mínima, o aço (CA50) trabalhará com sua capacidade total, ou seja,  $\epsilon_s > \epsilon_{pd} = 2,07\%$ , e a resistência do aço será  $f_s = f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$ . A resistência característica do concreto é  $f_{cd} = 20000 \text{ kN/m}^2$ .

$$KMD = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{1,4 \cdot m}{1,0 \cdot 0,08^2 \cdot 20000 / 1,4} = 0,0153 \cdot m$$

$$A_s = \frac{M_d}{(KZ) \cdot d \cdot f_s} = \frac{1,4 \cdot m (\text{kNm/m})}{(KZ) \cdot 0,08 (\text{m}) \cdot (50 \text{ kN/cm}^2) / 1,15} = 0,4025 \cdot \frac{m}{(KZ)} (\text{cm}^2)$$

Os passos para o cálculo e os resultados finais da área de aço por metro de largura da laje [ $A_s (\text{cm}^2/\text{m})$ ] estão no quadro seguinte:

Laje	L1				L2				L3		
	$m_x$	$m_y$	$x_x$	$x_y$	$m_x$	$m_y$	$x_x$	$x_y$	$m_x$	$m_y$	$x_x$
kNm/m	5,62	5,62	14,00	14,00	4,28	2,20	9,45	7,17	9,05	2,06	17,15
KMD	0,086	0,086	0,214	0,214	0,065	0,034	0,145	0,110	0,137	0,032	0,263
KZ	0,9472	0,9472	0,8515	0,8515	0,9602	0,9759	0,9058	0,9305	0,9094	0,9759	0,8068
$\epsilon_s (\%)$	10,000	10,000	5,926	5,926	10,000	10,000	10,000	10,000	10,000	10,000	3,746
m/(KZ)	5,933	5,933	16,430	16,430	4,457	2,254	10,444	7,706	9,853	2,111	21,269
$A_s$	2,388	2,388	6,613	6,613	1,794	0,907	4,204	3,102	3,966	0,850	8,561

#### g) Detalhamento da armadura

Para o detalhamento da armadura, cujo esquema se encontra na Figura 7.20, foram adotados os procedimentos relacionados a seguir.

g1) Diâmetro máximo das barras:  $\phi_{\text{máx}} = h/8 = 12 \text{ cm}/8 = 1,5 \text{ cm} = 15,0 \text{ mm}$ .

g2) Diâmetros utilizados: serão empregadas barras de  $\phi 6,3 \text{ mm}$  e  $\phi 10 \text{ mm}$ .

g3) Armadura mínima para seção retangular e  $f_{cd} = 20 \text{ MPa}$  (Quadro 4.2) e  $b_w = 100 \text{ cm}$ :

$$A_{s,\text{mín}} = \frac{0,15}{100} \cdot b_w \cdot h = \frac{0,15}{100} \cdot 100 \cdot 12 = 1,8 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

g4) Espaçamento (s) para a armadura mínima:

$$\phi 6,3 \text{ mm: } s = \frac{A_{s,\text{mín}}}{A_s} = \frac{0,32 \text{ cm}^2}{1,8 \text{ cm}^2 / \text{m}} = 0,18 \text{ m} = 18 \text{ cm}$$

$$\phi 10 \text{ mm: } s = \frac{A_s}{A_c} = \frac{0,8 \text{ cm}^2}{1,8 \text{ cm}^2 / \text{m}} = 0,44 \text{ m} = 44 \text{ cm}$$

g5) Espaçamento máximo adotado

Para as armaduras positiva e negativa foi adotado, de acordo com a norma, e que atende também a condição de armadura mínima, um espaçamento  $s \leq 20 \text{ cm}$ .

g6) Espaçamentos das barras

No quadro a seguir estão as barras empregadas para cada situação (diâmetro e área), os espaçamentos resultantes e os espaçamentos finais adotados.

Laje	L1				L2				L3		
	$m_x$	$m_y$	$x_x$	$x_y$	$m_x$	$m_y$	$x_x$	$x_y$	$m_x$	$m_y$	$x_x$
kNm/m	5,62	5,62	14,00	14,00	4,28	2,20	9,45	7,17	9,05	2,06	17,15
$A_s$ (cm <sup>2</sup> /m)	2,388	2,388	6,613	6,613	1,794	0,907	4,204	3,102	3,966	0,850	8,561
$\phi$ (mm)	$\phi 6,3$	$\phi 6,3$	$\phi 10$	$\phi 10$	$\phi 6,3$	$\phi 6,3$	$\phi 10$	$\phi 10$	$\phi 10$	$\phi 6,3$	$\phi 10$
$A_{s1}\phi$	0,32	0,32	0,80	0,80	0,32	0,32	0,80	0,80	0,80	0,32	0,80
s (m)	0,134	0,134	0,121	0,121	0,178	0,335	0,19	0,258	0,202	0,376	0,093
s final (cm)	12,5	12,5	12,5	12,5	17,5	17,5	20	20	20	17,5	10

g7) Comprimento e espaçamento das barras

• Armadura positiva (a letra N e o número identificam as barras na planta):

- Serão colocadas barras em todo o vão das lajes (armadura corrida);
- As barras deverão penetrar nos apoios (vigas) 6 cm ou  $10\phi = 10 \cdot 0,63 = 6,3$  cm; será adotado o valor de 7 cm;
- Largura das vigas = 12 cm (dado inicial);
- As dimensões das lajes, em planta, estão relacionadas aos eixos das vigas.

**Comprimentos para a laje L1 nas direções x e y:**

$$\ell = 600 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 602 \text{ cm (N1)}$$

**Comprimentos para a laje L2:**

$$\ell_x = 400 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 402 \text{ cm (N2)}$$

$$\ell_y = 600 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 602 \text{ cm (N1)}$$

• Comprimentos para a laje L3:

$$\ell_x = 500 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 502 \text{ cm (N3)}$$

$$\ell_y = 1000 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 1002 \text{ cm (N4)}$$

• Armadura negativa (a letra N e o número identificam as barras na planta):

- Todas as barras da armadura negativa têm diâmetro  $\phi = 10 \text{ mm}$ ;
- Nas lajes adjacentes será considerada a armadura referente ao maior momento;
- Todas as lajes serão consideradas isoladas, e a armadura, para todas as situações de vinculação, se estenderá no interior da laje a uma distância  $0,25 \cdot \ell_x$ , sendo  $\ell_x$  o menor vão da laje, conforme a Figura 7.18.

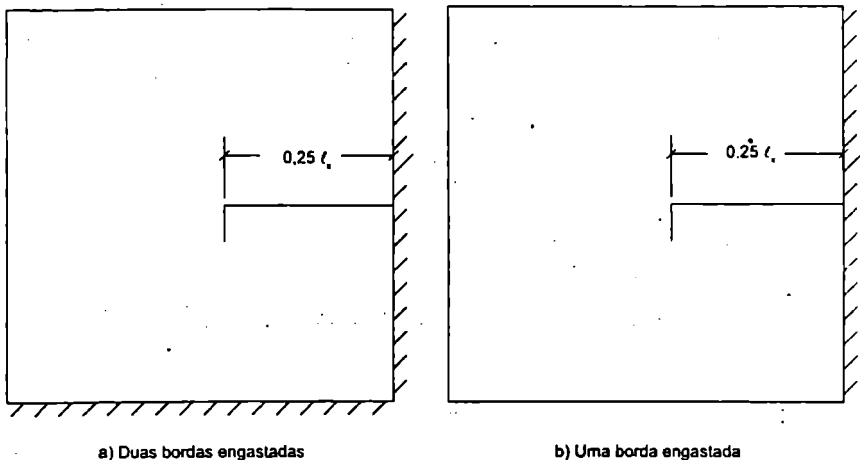


Figura 7.18 Comprimentos das barras da armadura negativa.

- Ao comprimento anterior deverá ser acrescentado o comprimento de ancoragem reto (aço CA50, boa aderência,  $f_{ct} = 20 \text{ MPa}$ ,  $\phi = 10,0 \text{ mm}$ ):

$$\ell_b = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{bd}} = \frac{1,0}{4} \cdot \frac{500}{1,15 \cdot 2,486} = 44 \text{ cm}$$

O cálculo de  $f_{bd}$  está feito no exemplo 1 do capítulo 5.

- Serão adotados, em todas as extremidades da armadura negativa, ganchos retos, calculados de forma simplificada como indicado na Figura 7.19, des-

contando da altura total da laje, 2,5 cm junto a cada face, resultando  $\ell_g = 12,0 - 2,5 = 7,0$  cm.



Figura 7.19 Esquema simplificado para determinar o comprimento dos ganchos.

- Comprimentos finais em cada laje:  $\ell = 0,25 \cdot \ell_x + \ell_b + \ell_g$ .

**Espaçamento e comprimento das barras da armadura comuns às lajes L1 e L2:**

L1<sub>y</sub>:  $\phi$  10,0 c/12,5 cm  
 L2<sub>x</sub>:  $\phi$  10,0 c/20 cm

⇒ adota-se  $\phi$  10,0 c/12,5 cm

Comprimento na laje L1:  $0,25 \cdot 600 + 44 + 7 = 201$  cm

Comprimento na laje L2:  $0,25 \cdot 400 + 44 + 7 = 151$  cm

⇒ comprimento total = 352 cm (N5)

**Espaçamento e comprimento das barras da armadura comuns às lajes L1 e L3:**

L1<sub>x</sub>:  $\phi$  10,0 c/12,5 cm

L3<sub>x</sub>:  $\phi$  10,0 c/10 cm

⇒ adota-se  $\phi$  10,0 c/10 cm

Comprimento na laje L1:  $0,25 \cdot 600 + 44 + 7 = 201$  cm

Comprimento na laje L3:  $0,25 \cdot 500 + 44 + 7 = 176$  cm

⇒ comprimento total = 377 cm (N5)

**Espaçamento e comprimento das barras da armadura comuns às lajes L2 e L3:**

L2<sub>y</sub>:  $\phi$  10,0 c/20 cm

L3<sub>x</sub>:  $\phi$  10,0 c/10 cm

⇒ adota-se  $\phi$  10,0 c/10 cm

Comprimento na laje L2:  $0,25 \cdot 400 + 44 + 7 = 151$  cm

Comprimento na laje L3:  $0,25 \cdot 500 + 44 + 7 = 176$  cm

⇒ comprimento total = 327 cm (adotar mesmo que L1 c/ L3)

**Observação:** como L3 possui uma borda em interface com L1 e com L2 e as armaduras de ambas possuem bitolas e espaçamentos iguais ( $\phi$  10 mm c/ 10 cm), serão adotadas as mesmas barras em toda a interface com o comprimento da maior, ou seja, 377 cm (barras N6).

com o...

$f_{yk} \rightarrow f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1,25} = 0,8 \cdot f_{yk}$

$f_{yk} \rightarrow f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1,15} = 0,87 \cdot f_{yk}$

g8) Quantidade (N) de barras (positivas e negativas) para cada situação

A quantidade de barras será calculada dividindo-se a distância de eixo a eixo em uma direção pelo espaçamento (s) adotado, indicando como exemplo o número de barras da armadura negativa entre as lajes L1-L2:

$$N = \frac{\ell_{\text{eixo-eixo}}}{s} = \frac{600 \text{ cm}}{12,5 \text{ cm}} = 48 \text{ barras}$$

Na Figura 7.20 estão a planta de formas e o detalhamento das armaduras positiva e negativa (tracejadas) das lajes L1, L2 e L3 do pavimento do exemplo 1.

b) Reações das lajes nas vigas

As reações nas vigas de contorno, devido às lajes, são calculadas com as expressões 7.23 a 7.26, com os fatores  $k_x, k_y, k'_x, k'_y$  dados nos quadros 7.8, 7.9 e 7.10:

$$q_x = k_x \cdot p \cdot \frac{\ell_x}{10} \quad q_y = k_y \cdot p \cdot \frac{\ell_y}{10} \quad q'_x = k'_x \cdot p \cdot \frac{\ell_x}{10} \quad q'_y = k'_y \cdot p \cdot \frac{\ell_y}{10}$$

Os resultados, em kN/m, estão no quadro seguinte, para  $p = 5,56 \text{ kN/m}^2$ :

Laje	Caso	$\ell_x$	$\lambda$	$p\ell_x$	$k_x$	$q_x$	$k_y$	$q_y$	$k'_x$	$q'_x$	$k'_y$	$q'_y$
L1	4	6,0	1,0	33,36	1,83	6,10 (V4)	1,83	6,10 (V1)	3,17	10,58 (V5)	3,17	10,58 (V2)
L2	4	4,0	1,5	22,24	2,44	5,43 (V3)	1,83	4,07 (V4)	4,23	9,41 (V2)	3,17	7,05 (V5)
L3	3	5,0	2,0	27,80	2,99	8,31 (V6)	1,83	5,09 (V1;V3)	5,18	14,40 (V5)	-	-

Nas vigas comuns às duas lajes, o carregamento deve ser somado para se obter o valor final. É possível verificar se os valores das reações estão corretos, pois a carga total que atua em cada laje (carga distribuída multiplicada pela área da laje) deve ser igual à soma das cargas resultantes nas vigas de contorno.

Laje L1

Carga total na laje:  $P = p \cdot \ell_x \cdot \ell_y = 5,56 \cdot 6,0 \cdot 6,0 = 200,16 \text{ kN}$

Carga total nas vigas:  $P = q_{v1} + q_{v2} + q_{v4} + q_{v5}$

$$P = q_y \cdot \ell_x + q_y \cdot \ell_x + q_x \cdot \ell_y + q'_x \cdot \ell_y$$

$$P = (6,10 + 10,58) \cdot 6,0 + (6,10 + 10,58) \cdot 6,0 = 200,16 \text{ kN}$$

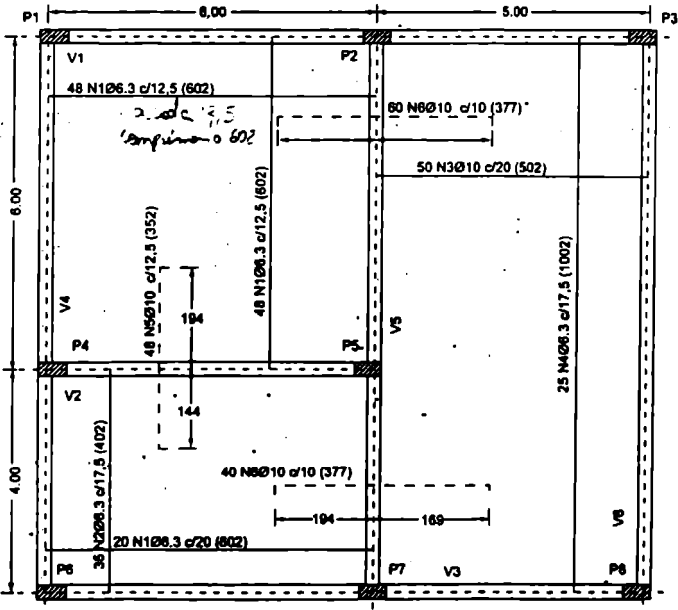
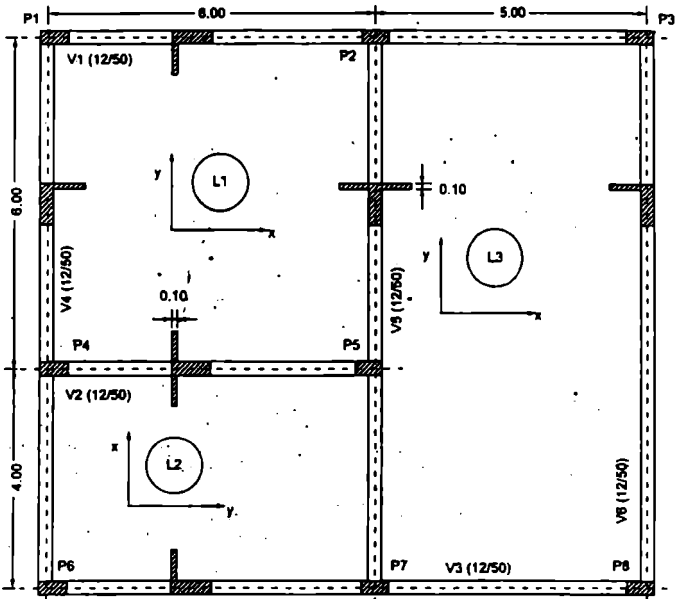


Figura 7.20 Detalhamento da armadura do pavimento (medidas em cm).

## Laje L2

$$\text{Carga total na laje: } P = p \cdot \ell_x \cdot \ell_y = 5,56 \cdot 6,0 \cdot 4,0 = 133,44 \text{ kN}$$

$$\text{Carga total nas vigas: } P = q_{v2} + q_{v3} + q_{v4} + q_{v5}$$

$$P = q_x \cdot \ell_y + q_x \cdot \ell_y + q_y \cdot \ell_x + q_y \cdot \ell_x$$

$$P = (9,41 + 5,43) \cdot 6,0 + (4,07 + 7,05) \cdot 4,0 = 133,52 \text{ kN}$$

## Laje L3

$$\text{Carga total na laje: } P = p \cdot \ell_x \cdot \ell_y = 5,56 \cdot 5,0 \cdot 10,0 = 278,0 \text{ kN}$$

$$\text{Carga total nas vigas: } P = q_{v1} + q_{v3} + q_{v5} + q_{v6}$$

$$P = 2 \cdot q_y \cdot \ell_x + q_x \cdot \ell_y + q_x \cdot \ell_y$$

$$P = 2 \cdot 5,09 \cdot 5,0 + (8,31 + 14,40) \cdot 10,0 = 278,0 \text{ kN}$$

### i) Verificação ao cisalhamento

#### i1) Verificação da necessidade de armadura de cisalhamento

A verificação da necessidade de utilização de armadura de cisalhamento nas lajes será feita para a laje 3, que apresenta o maior valor para a reação (força cortante) de todas as lajes, no caso junto à viga V5. Compara-se a força cortante de cálculo  $V_{sd}$  com a força resistente de projeto ao cisalhamento  $V_{Rd1}$  (se  $V_{sd} \leq V_{Rd1}$  não é necessário armadura de cisalhamento).

Para essa verificação são necessárias as seguintes informações, resultantes dos cálculos e detalhamento já efetuados:

- Força cortante solicitante:  $V_s = 14,40 \text{ kN/m}$ ;
- Toda a armadura inferior se estende ao longo das lajes, chegando até ao apoio;
- Na laje L3, a armadura longitudinal inferior é composta de barras de  $\phi 10 \text{ mm}$  ( $0,8 \text{ cm}^2$ ) a cada 20 cm, resultando em 5 barras por metro.

O valor de  $V_{sd}$  (força cortante solicitante de cálculo) é:

$$V_{sd} = 1,4 \cdot V_s = 1,4 \cdot 14,40 = 20,16 \text{ kN}$$

O valor da força resistente de projeto  $V_{Rd1}$  é dado pela equação 7.27:

$$V_{Rd1} = [\tau_{Rd} \cdot k \cdot (1,2 + 40 \cdot \rho_1) + 0,15 \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d$$

$$V_{Rd1} = [276 \cdot 1,52 \cdot (1,2 + 40 \cdot 0,005)] \cdot 1,0 \cdot 0,08 = 47,0 \text{ kN}$$

em que:

$$\begin{aligned}\tau_{Rd} &= 0,25 \cdot f_{ctd} = 0,25 \cdot f_{ct,red} / \gamma_c = 0,25 \cdot 0,7 \cdot f_{ct,m} / \gamma_c = 0,25 \cdot 0,7 \cdot 0,3 \cdot f_{ct}^{2/3} / \gamma_c; \\ \tau_{Rd} &= 0,0525 \cdot 20^{2/3} / 1,4 = 0,0525 \cdot 7,368 / 1,4 = 0,276 \text{ MPa} = 276 \text{ kN/m}^2; \\ k &= 1,6 - d = 1,6 - 0,08 = 1,52 > 1; \\ \rho_1 &= \frac{A_{s1}}{b_w \cdot d} = \frac{5 \cdot 0,8}{100 \cdot 8} = 0,005 < 0,02;\end{aligned}$$

$\sigma_{cp} = 0$  (não há força longitudinal na seção).

Portanto,  $V_{Sd} = 20,16 \text{ kN} < V_{Rd1} = 47,0 \text{ kN}$ , e não há necessidade de armadura transversal de cisalhamento. Caso essa condição não fosse verificada, deveria ser colocada armadura, calculada como em vigas.

## i2) Verificação da compressão diagonal do concreto

A verificação da compressão nas bielas de concreto é feita comparando  $V_{Sd}$  com  $V_{Rd2}$  dado pela expressão 7.28.

$$V_{Sd} = 1,4 \cdot V_s = 1,4 \cdot 14,40 = 20,16 \text{ kN}$$

$$V_{Rd2} = 0,5 \cdot \alpha_{v1} \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot 0,9 \cdot d = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 14285 \cdot 1,0 \cdot 0,9 \cdot 0,08 = 257,13 \text{ kN}$$

em que:

$$\alpha_{v1} = (0,7 - f_{ct}/200) = (0,7 - 20/200) = 0,6 > 0,5 \Rightarrow \alpha_{v1} = 0,5;$$

$$f_{ctd} = f_{ct} / \gamma_c = 20000 / 1,4 = 14285 \text{ kN/m}^2.$$

Como  $V_{Sd}$  é menor que  $V_{Rd2}$ , não há problema de compressão excessiva nas bielas de concreto.

## ADENDO

### RESUMO DAS EXPRESSÕES RELACIONADAS NESTE CAPÍTULO

Equação fundamental de placas delgadas	
$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{p}{D}$	(7.1)
$\text{Com } D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$	
Momento fletor na direção x de placa delgada	
$\frac{m_x}{D} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$	(7.2)

Momento fletor na direção y de placa delgada

$$\frac{m_y}{D} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (7.3)$$

Momento fletor de placa delgada por unidade de comprimento

$$m_x = \frac{M_x}{\ell_y} \quad (7.4)$$

Rigidez de uma viga retangular de largura unitária

$$E \cdot I = \frac{E \cdot h^3}{12} \quad (7.5)$$

Carga em placa representada por série de Fourier

$$p = p(x, y) = \sum_m \sum_n p_{mn} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (7.6)$$

Linha elástica de placa retangular sob carga p em contorno com rotação livre

$$w = \frac{p_{mn}}{\pi^4 \cdot D \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (7.7)$$

Carga aplicada em placa dada por uma série de Fourier

$$p_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \cdot \iint_0^a \int_0^b p(x, y) \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \cdot dx \cdot dy \quad (7.8)$$

Carga para m e n ímpares e carga uniforme ( $\bar{p}$ ) distribuída na placa

$$p_{mn} = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^2 \cdot m \cdot n} \quad (7.9)$$

Linha elástica (deslocamento vertical) de uma placa com carga uniforme e apoio livre

$$w = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^6 \cdot D} \cdot \sum_m \sum_n \frac{\text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}}{m \cdot n \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (7.10)$$

Momento fletor positivo em uma placa na direção x para uma faixa unitária	
$m_x = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^4} \cdot \sum_m \sum_n \frac{\left( \frac{m^2}{a^2} + v \cdot \frac{n^2}{b^2} \right)}{m \cdot n \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (7.11)$	
Momento fletor positivo em uma placa na direção y para uma faixa unitária	
$m_y = \frac{16 \cdot \bar{p}}{\pi^4} \cdot \sum_m \sum_n \frac{\left( \frac{n^2}{b^2} + v \cdot \frac{m^2}{a^2} \right)}{m \cdot n \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \text{sen} \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (7.12)$	
Momento fletor positivo em x para um coeficiente de Poisson $v_2$ conhecido o valor para $v_1$	
$(m_x)_{v_2} = \frac{1}{(1 - v_1^2)} \cdot \{ (1 - v_2 \cdot v_1) \cdot (m_x)_{v_1} + (v_1 - v_2) \cdot (m_y)_{v_1} \} \quad (7.13)$	
Momento fletor positivo em y para um coeficiente de Poisson $v_2$ conhecido o valor para $v_1$	
$(m_y)_{v_2} = \frac{1}{(1 - v_1^2)} \cdot \{ (1 - v_2 \cdot v_1) \cdot (m_y)_{v_1} + (v_1 - v_2) \cdot (m_x)_{v_1} \} \quad (7.14)$	
Deslocamento vertical de uma placa para um coeficiente de Poisson $v_2$ conhecido o valor para $v_1$	
$(w)_{v_2} = (w)_{v_1} \cdot \frac{1 - v_2^2}{1 - v_1^2} \quad (7.15)$	
Flecha de laje retangular para carga uniforme	
$f = \frac{P \cdot \ell_x^4}{E \cdot h^3} \cdot \frac{\alpha}{100} \quad (7.16)$	
Relação entre lados de lajes retangulares	
$\lambda = \frac{\ell_y}{\ell_x} \quad (7.17)$	

Momento fletor máximo positivo na direção x para laje retangular para carga uniforme

$$m_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot \ell_x^2}{100} \quad (7.18)$$

Momento fletor máximo positivo na direção y para laje retangular para carga uniforme

$$m_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot \ell_x^2}{100} \quad (7.19)$$

Momento fletor negativo na direção x para laje retangular para carga uniforme

$$x_x = \mu_x \cdot \frac{p \cdot \ell_x^2}{100} \quad (7.20)$$

Momento fletor negativo na direção y para laje retangular para carga uniforme

$$x_y = \mu_y \cdot \frac{p \cdot \ell_x^2}{100} \quad (7.21)$$

Altura útil mínima para lajes e vigas segundo a ABNT NBR 6118:1980

$$d \geq \frac{\ell}{\psi_2 \cdot \psi_3} \quad (7.22)$$

Reações nas vigas de apoio simples de lajes na direção x

$$q_x = k_x \cdot p \cdot \frac{\ell_x}{10} \quad (7.23)$$

Reações nas vigas de apoio simples de lajes na direção y

$$q_y = k_y \cdot p \cdot \frac{\ell_x}{10} \quad (7.24)$$

Reações nas vigas de apoio engastado de lajes na direção x

$$q_x = k_x \cdot p \cdot \frac{\ell_x}{10} \quad (7.25)$$

Reações nas vigas de apoio engastado de lajes na direção y

$$q_y = k_y \cdot p \cdot \frac{\ell_x}{10} \quad (7.26)$$

Verificação ao cisalhamento em lajes sem armadura transversal	
$V_{Sd} \leq V_{Rd1} = [\tau_{Rd} \cdot k \cdot (1,2 + 40 \cdot \rho_1) + 0,15 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d$ $\tau_{Rd} = 0,25 \cdot f_{ctd} = 0,25 \cdot f_{ctk,inf} / \gamma_c$ $k = (1,6 - d) \geq 1$ $\rho_1 = A_{s1} / (b_w \cdot d) \leq 0,02$	(7.27)
Verificação do esmagamento do concreto na diagonal inclinada comprimida em lajes sem armadura de cisalhamento	
$V_{Rd2} = 0,5 \cdot \alpha_{v1} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot 0,9 \cdot d$ $\alpha_{v1} = (0,7 - f_{ct} / 200) \leq 0,5 \text{ (} f_{ct} \text{ em MPa);}$ $f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c = f_{ck} / 1,4 \text{ é a resistência de cálculo do concreto.}$	(7.28)
vão efetivo em lajes	
$\ell_{ef} = \ell_0 + a_1 + a_2$ <p><math>\ell_0</math> é a distância entre faces internas de dois apoios consecutivos</p> <p><math>a_1</math> é o menor valor entre <math>t_1/2</math> e <math>0,3 \cdot h</math></p> <p><math>a_2</math> é o menor valor entre <math>t_2/2</math> e <math>0,3 \cdot h</math></p> <p><math>h</math> é a altura da laje</p> <p><math>t_1</math> e <math>t_2</math> são as larguras dos apoios adjacentes</p>	(7.29)
Quantidade de barras por metro de laje ( $A_s$ é a área total e $A_s \phi$ é a área de uma barra)	
$n = \frac{A_s}{A_s \phi}$	(7.30)
Espaçamento das barras por metro de laje	
$s \doteq \frac{A_s \phi}{A_s} \text{ (m)}$	(7.31)



**FLEXÃO DE LAJES NERVURADAS UNIDIRECIONAIS CONTÍNUAS COM VIGOTAS PRÉ-MOLDADAS**

As seções transversais das lajes com nervuras pré-moldadas têm a forma de "T", e, portanto, em lajes contínuas (como a esquematizada na Figura A1.1 com dois tramos iguais) resistem melhor aos momentos positivos que aos negativos, pois a região comprimida de concreto disponível junto à face inferior da laje (região comprimida para momento negativo, seção BB da Figura A1.1) é constituída apenas pela nervura (com largura  $b_n$ ), sendo bem menor que a região junto à face superior, constituída pela mesa (região comprimida para momento positivo, seção AA da Figura A1.1), de largura  $b_r$ . As regiões comprimidas têm altura definida pela profundidade  $x$  da linha neutra (LN), determinada para cada uma das duas situações.

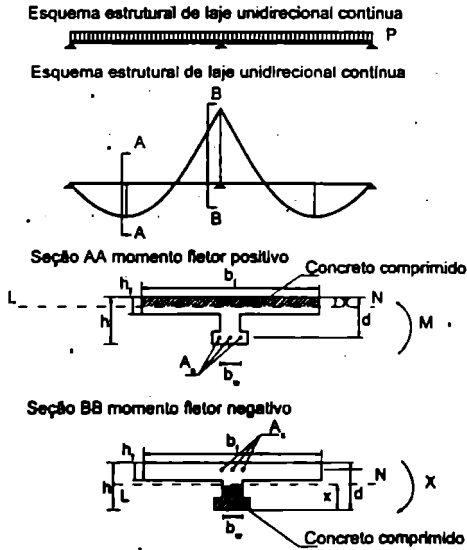


Figura A1.1 Laje contínua unidirecional, submetida a momentos fletores positivo e negativo.

Assim, em lajes contínuas nervuradas, nem sempre é possível obter, junto aos apoios intermediários, regiões comprimidas suficientes para resistir ao momento negativo total encontrado pelo cálculo elástico (admite os materiais, no caso o concreto armado, como sendo homogêneo e com comportamento linear, características estas

do estágio I), considerando seções com armadura simples no estado limite último e trabalhando na ductilidade mínima de acordo com a norma. Pode-se considerar, nestas situações, que o momento negativo resistente (região superior do apoio) seja menor que o momento atuante obtido do cálculo elástico, quando se considera a seção funcionando no estágio I; ocorre então a redistribuição de momentos ou mesmo a plastificação da seção, com o surgimento de uma rótula plástica no apoio.

A redistribuição consiste na alteração do diagrama de momento fletor quando alguns trechos da estrutura, por estarem submetidos a momentos superiores ao de fissuração, têm a sua rigidez diminuída, ocasionando o que se chama de plastificação, enquanto outros trechos permanecem íntegros. A partir da plastificação da seção, que acontece para um determinado valor de momento fletor (momento de plastificação), a seção gira sem transmitir mais momento. Para melhor entendimento, mostra-se a mesma laje unidirecional contínua da Figura A1.1, com os diagramas de momento fletor devido ao comportamento elástico e com plastificação na região do apoio na Figura A1.2. No caso do diagrama elástico, considerando os dois tramos iguais a  $\ell$ , o momento no apoio intermediário (negativo) para uma carga  $p$  é:

$$X_{\text{elástico}} = \frac{p \cdot \ell^2}{8}$$

Se a seção no apoio for capaz de resistir a este momento, o diagrama é o apresentado na Figura A1.2 (diagrama de momento elástico), calculado da forma usual. Se a seção do apoio só for capaz de resistir a um momento fletor menor ( $X_{\text{plástico}}$ ), então o diagrama de momento, com plastificação no apoio central (Figura A1.2), para que o equilíbrio seja mantido, apresentará momento positivo máximo no tramo ( $M_{\text{plástico}}$ ) maior que o elástico usual.

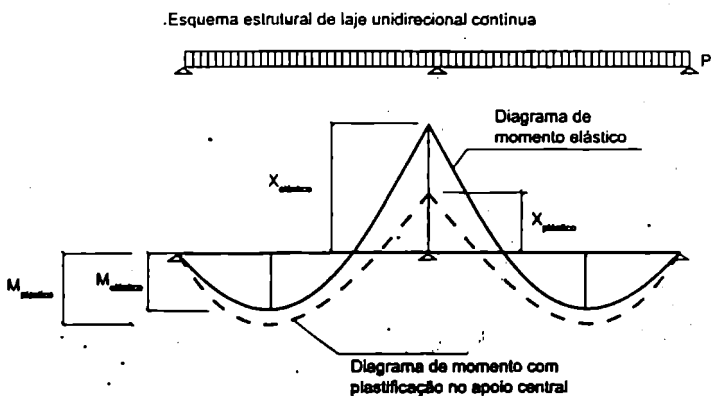


Figura A1.2 Diagramas de momentos elástico e com plastificação no apoio central em uma laje contínua unidirecional.

Em razão da grande dificuldade em determinar um valor adequado para  $X$  tem sido usual admitir que os elementos pré-moldados sejam sempre simplesmente apoiados, o que resulta em momentos positivos maiores que em elementos contínuos. Dessa maneira, para uma mesma sollicitação "p", resulta uma seção maior ou em uma limitação do vão a ser vencido, além de ocorrer deslocamentos maiores. Por essa razão, é mais racional aproveitar as vantagens da continuidade, pois há uma melhor distribuição de momentos, com a redução dos positivos, possibilitando vencer vãos maiores (ou suportar cargas mais elevadas). Assim, em pavimentos compostos de diversos painéis, sempre que a geometria permitir, as vigotas devem ser dispostas de modo a aproveitar o efeito vantajoso da continuidade, com o esquema estático das nervuras aproximando-se ao de uma viga contínua hiperestática.

Entretanto, em decorrência da plastificação do concreto, não é possível definir com precisão qual o momento negativo a considerar no cálculo, pois a hipótese de comportamento elástico não corresponde à situação real. Assim, além da solução usual de considerar os elementos simplesmente apoiados, é possível obter a continuidade das nervuras com as providências relacionadas a seguir.

#### a) Empregar uma nervura de grande altura

Esta solução consiste em **empregar uma nervura de grande altura para resistir aos momentos negativos**, aumentando a região comprimida de concreto. Nesse caso, a altura útil deverá ser igual ou maior que a mínima, que pode ser determinada de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, que, no item 14.6.4.3, indica: "A capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da linha neutra no ELU. Quanto menor for  $x/d$ , tanto maior será essa capacidade". Complementa ainda que para proporcionar o adequado comportamento dúctil em vigas e lajes, a posição da linha neutra no ELU deve obedecer aos seguintes limites:

- $x/d \leq 0,45$  – para concretos com  $f_{ck} \leq 50$  MPa;
- $x/d \leq 0,35$  – para concretos com  $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90$  MPa.

Esses limites podem ser alterados se forem utilizados detalhes especiais de armaduras, como os que produzem confinamento nessas regiões. Dessa forma, nas regiões do apoio em que normalmente o momento fletor tem a sua maior intensidade e a seção de concreto comprimido é pequena, deve ser verificado se a altura disponível ( $d$ ) é maior que a mínima ( $d_{mín}$ ), dada pelas seguintes expressões, a partir da equação 3.42:

$$d = \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{ctd} \cdot (0,68 \cdot \xi - 0,272 \cdot \xi^2)}}$$

- com  $\xi = x/d = 0,45$  (concretos com  $f_{ck} \leq 50$  MPa):

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd} \cdot (0,68 \cdot 0,45 - 0,272 \cdot 0,45^2)}} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd}}}$$

• com  $\xi = x/d = 0,35$  (concretos com  $50 \text{ MPa} < f_{cd} \leq 90 \text{ MPa}$ ):

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd} \cdot (0,68 \cdot 0,35 - 0,272 \cdot 0,35^2)}} = 2,2 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd}}}$$

Assim, fazendo com que na seção do apoio a altura útil seja maior que a altura útil mínima ( $d > d_{\min}$ ), pode-se empregar o momento obtido da análise linear, garantindo que no ELU as seções irão trabalhar de forma dúctil.

### b) Fazer um trecho maciço junto ao apoio intermediário

Se for necessário, por questões práticas, econômicas ou mesmo de restrição de projeto usar na seção do apoio em que atua o momento negativo uma altura útil menor que a mínima, uma solução possível é fazer um trecho maciço de concreto junto ao apoio intermediário para aumentar a capacidade resistente da seção (Figura A1.3). Nesta situação, a largura da seção de concreto comprimido aumenta consideravelmente e passa a ter a mesma eficiência à flexão que as seções do meio do tramo que trabalham como seção "T".

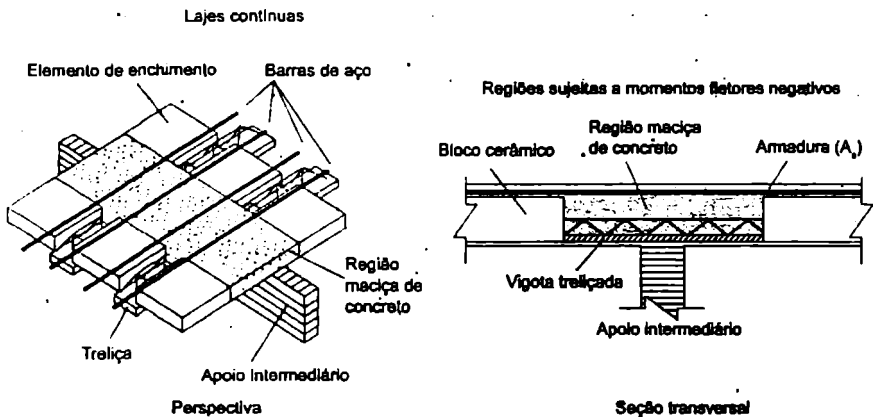


Figura A1.3 Região maciça da laje sobre o apoio interno.

Assim, a certa distância do apoio (em direção ao centro do apoio) retira-se o material inerte, substituindo-o por concreto, passando a existir um trecho maciço que, em geral, não é considerado na rigidez para efeito de cálculo de esforços. A largura dessa região pode ser determinada de duas maneiras: a partir do ponto de momento nulo; ou a partir da seção em que o momento resistente da nervura é igual ao momento atuante.

Este procedimento melhora o acabamento na ligação laje com a viga, mas leva a um consumo maior de formas e de concreto. Normalmente, a extensão necessária do trecho maciço é pequena e seu custo não é grande.

c) Adotar um trecho com armadura dupla

Outra solução, quando também for necessário empregar na seção do apoio uma altura útil menor que a mínima, é adotar um **trecho com armadura dupla para garantir a ductilidade da seção de acordo com a norma**. A armadura comprimida auxilia o concreto na resistência às tensões de compressão provocadas pelo momento negativo, não sendo assim necessário aumentar a seção de concreto. Nesta situação, impõe-se que no ELU a seção irá trabalhar com  $x/d = 0,45$  (para  $f_{ck} \leq 50$  MPa) e a partir daí calcula-se a armadura dupla como indicado na seção 3.7.6.

d) Efetuar a redistribuição de momentos

Outra possibilidade para solucionar o problema é promover uma **redistribuição do momento fletor negativo aumentando o positivo**. Neste caso, reduz-se o momento fletor negativo ( $M$ ) na seção do apoio para um valor ( $\delta \cdot M$ ), e a profundidade da linha neutra ( $x/d$ ) nessa seção deve ser limitada por (item 14.6.4.3 da ABNT NBR 6118:2014):

- $x/d \leq (\delta - 0,44)/1,25$  para concretos com  $f_{ck} \leq 50$  MPa;
- $x/d \leq (\delta - 0,56)/1,25$  para concretos com  $50$  MPa  $< f_{ck} \leq 90$  MPa.

O coeficiente de redistribuição deve, ainda, obedecer aos seguintes limites:

- $\delta \geq 0,90$  para estruturas de nós móveis;
- $\delta \geq 0,75$  em qualquer outro caso.

Podem ser adotadas redistribuições fora dos limites estabelecidos na norma, desde que a estrutura seja calculada mediante o emprego de análise não linear ou de análise plástica, com verificação explícita da capacidade de rotação das rótulas plásticas.

e) Permitir a plastificação da seção do apoio

A última possibilidade é permitir a **plastificação de pelo menos a seção do apoio**, de acordo com a ABNT NBR 6118:2014, que no item 14.6.4.4 indica: "Para verificações de estados limites últimos pode ser efetuada a análise plástica da estrutura, com a simulação de rótulas plásticas localizadas nas seções críticas"; e: "É obrigatória a verificação das rotações nas rótulas plásticas, correspondentes aos mecanismos adotados, que não podem superar a capacidade de rotação plástica das seções transversais correspondentes".

A norma estabelece ainda que "o limite da rotação plástica solicitante, função da profundidade da linha neutra no estado limite último – flexão simples para o momento fletor solicitante  $M_{sd}$  da seção crítica, dada na Figura A1.4, corresponde à razão  $a/d =$

3, onde  $a = M_{sd}/V_{sd}$ , sendo  $V_{sd}$  a força cortante nessa seção. Para outras relações  $a/d$ , multiplicar os valores extraídos da Figura A14 pelo fator  $\sqrt{(a/d)/3}$ .

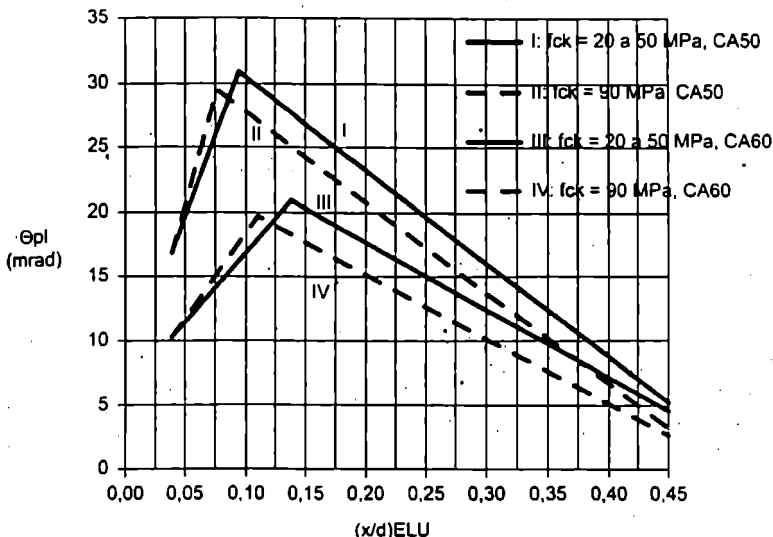


Figura A1.4 Capacidade de rotação de rótulas plásticas (Figura 14.7 da ABNT NBR 6118:2014).

### EXEMPLO

Calcular a armadura de uma nervura de laje pré-moldada com dois vãos contínuos de 5,50 m cuja seção transversal é indicada na Figura A1.5, com os seguintes dados:  $f_{ck} = 20$  MPa (20000 kN/m<sup>2</sup>); aço CA50; distância do cg da armadura à borda mais tracionada igual a 2,0 cm; peso próprio igual a 2,20 kN/m<sup>2</sup>; peso de piso mais revestimento igual a 1,00 kN/m<sup>2</sup>; e carga acidental  $q$  igual a 5,00 kN/m<sup>2</sup>.

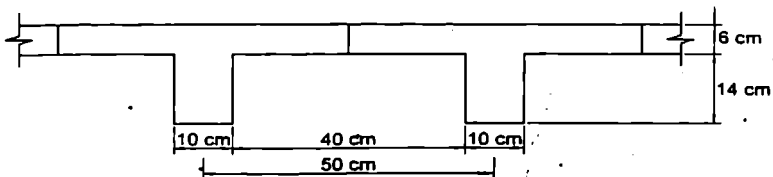


Figura A1.5 Seção transversal adotada para a laje do exemplo.

a) Cálculos preliminares

a1) Carga total atuante na laje

$$p = 2,20 + 1,00 + 5,00 = 8,20 \text{ kN/m}^2$$

a2) Carga atuante em cada nervura para o intereixo de 50 cm

$$p_{\text{nerv}} = 8,20 \cdot 0,50 = 4,10 \text{ kN/m/nervura}$$

a3) Esquema estrutural e momentos fletores no caso de haver continuidade

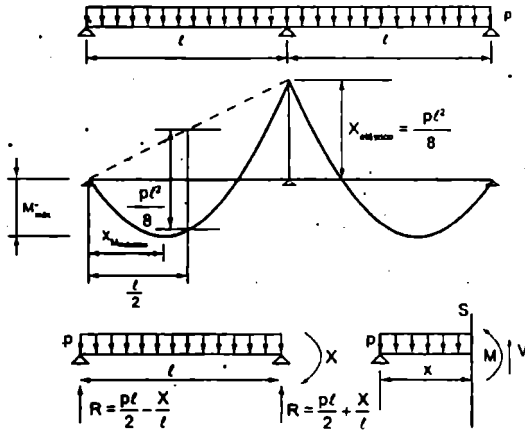


Figura A1.6 Esquema estrutural de uma nervura e ações, admitindo-a elástica (estádio I) e de inércia constante.

Admitindo que o concreto armado tenha comportamento elástico-linear (não apresenta fissuras, estágio I), o diagrama de momento fletor da laje (nervura) pode ser calculado como o de uma viga (ver capítulo 2), neste caso, contínua.

A força cortante e o momento fletor em uma seção genérica  $x$ , a reação de apoio  $R$  e os momentos fletores máximo positivo e negativo (apoio) são obtidos conforme o exemplo 1 do capítulo 4, e valem:

- Força cortante em uma seção genérica  $\Rightarrow V = R - p \cdot x$
- Momento fletor em uma seção genérica  $\Rightarrow M = R \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2}$
- Momento negativo no apoio  $\Rightarrow X = \frac{p \cdot \ell^2}{8} = \frac{4,10 \cdot 5,5^2}{8} = 15,50 \text{ kNm}$
- Reação de apoio  $\Rightarrow R = \frac{p \cdot \ell}{2} + \frac{X}{\ell} = \frac{3 \cdot p \cdot \ell}{8} = \frac{3 \cdot 4,10 \cdot 5,5}{8} = 8,46 \text{ kN}$
- Ponto de cortante zero ( $M_{\text{max}}$ )  $\Rightarrow x = R/p$
- Momento máximo positivo  $\Rightarrow M_{\text{max}}^+ = \frac{9 \cdot p \cdot \ell^2}{128} = \frac{9 \cdot 4,1 \cdot 5,5^2}{128} = 8,72 \text{ kNm}$

a4) Largura colaborante ( $b_r$ ) para seção "T" ( $b_w = 10$  cm)

Antes de determinar a armadura necessária na nervura, é preciso verificar, como tratado no capítulo 3, qual a parcela ( $b_r$ ) da capa da laje colabora para a resistência à flexão da nervura:

$$b_r \leq \begin{cases} b_w + 0,10 \cdot a = 10 + 0,10 \cdot 412,5 = 51,25 \text{ cm} \\ b_w + 2 \cdot b_1 = 10 + 2 \cdot 20 = 50,0 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow b_r = 50,0 \text{ cm};$$

em que:

$a = 0,75 \cdot \ell = 0,75 \cdot 550 = 412,5$  cm para tramos com momento em uma só extremidade;

$$b_1 \leq \begin{cases} 0,5 \cdot b_2 = 0,5 \cdot 40 = 20 \text{ cm} \\ 0,10 \cdot a = 0,10 \cdot 412,5 = 41,25 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow b_1 = 20,0 \text{ cm};$$

$b_2 = 40,0$  cm é a distância entre as faces internas de duas nervuras adjacentes.

b) Primeira solução: laje com dois tramos simplesmente apoiados com vãos de 5,5 m. Nesta solução, os elementos são considerados simplesmente apoiados, sem continuidade. Dessa forma, só há momentos positivos no meio dos vãos, e a seção vai trabalhar com parte ou toda a mesa comprimida. O momento máximo no meio do vão vale:

$$M = \frac{P \cdot \ell^2}{8} = \frac{4,10 \cdot 5,5^2}{8} = 15,50 \text{ kNm}$$

b1) Verificação se a seção é retangular ou "T"

É necessário verificar se a seção trabalha como retangular ou "T" para o momento positivo, e para isso determina-se a posição da linha neutra, supondo, a princípio, que ela passe pela mesa:

$$d = 20 - 2 = 18 \text{ cm}; b = b_r = 50,0 \text{ cm}; M_{\text{pos}} = 15,50 \text{ kNm};$$

$$KMD = \frac{M_d}{b_r \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{1,4 \cdot 15,50}{0,50 \cdot 0,18^2 \cdot 20000 / 1,4} = 0,0938.$$

Utilizando  $KMD = 0,095$  (próximo maior valor)  $\Rightarrow$  Quadro 3.1  $\Rightarrow KX = 0,1485$ .

$KX = x/d = 0,1485 < 0,45$  (limite para a relação  $x/d$  prescrita pela norma).

$$x = KX \cdot d = 0,1485 \cdot 18 = 2,67 \text{ cm} < h_f = 6 \text{ cm}.$$

L.N. passa na mesa  $\Rightarrow$  seção retangular com  $b_w = b_r = 0,50$  m.

b2) Cálculo da armadura positiva ( $M_{\text{pos.}} = 15,50 \text{ kNm}$ )

$$\text{KMD} = 0,095 \Rightarrow \text{KZ} = 0,9406;$$

$$A_s = \frac{M_d}{\text{KZ} \cdot d \cdot f_{yd}} = \frac{1,4 \cdot 15,50}{0,9406 \cdot 0,18 \cdot 50} = 2,95 \text{ cm}^2.$$

c) Segunda solução: laje contínua com tramos de 5,50 m e trecho maciço junto ao apoio. Nesta situação, a laje é considerada contínua, o diagrama de momentos é o indicado na Figura A1.6 e os momentos positivo e negativo valem respectivamente  $M_{\text{máx}} = 8,72 \text{ kNm}$  e  $X = 15,50 \text{ kNm}$ , calculados em a3).

A altura mínima para garantir a ductilidade para concretos com  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$  ( $\xi = x/d = 0,45$ ) é dada por:

$$d_{\text{min}} = \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd} \cdot (0,68 \cdot 0,45 - 0,272 \cdot 0,45^2)}} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{M_d}{b_w \cdot f_{cd}}}$$

Aplicando a expressão para o momento máximo no vão, supondo a LN na mesa ( $b_w = b_f = 0,50 \text{ m}$ ), resulta:

$$d_{\text{min}} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,72}{0,50 \cdot 20000 / 1,4}} = 0,083 \text{ m} = 8,3 \text{ cm} < d = 18 \text{ cm}, \text{ altura útil real da se-}$$

ção, e a condição ( $d > d_{\text{min}}$ ) está atendida.

Aplicando a expressão para o momento negativo na seção do apoio, em que a largura da região comprimida é  $b_w = 0,10 \text{ m}$ , resulta:

$$d_{\text{min}} = 2,0 \cdot \sqrt{\frac{1,4 \cdot 15,50}{0,10 \cdot 20000 / 1,4}} = 0,246 \text{ m} = 24,6 \text{ cm} > d = 18 \text{ cm}, \text{ altura útil real da}$$

seção, e a condição ( $d > d_{\text{min}}$ ) não está atendida.

Nesse caso, será necessário determinar o máximo momento que a seção tem capacidade de resistir, atendendo o limite de ductilidade da norma.

c1) Cálculo do momento resistido pela seção retangular com  $x/d = 0,45$

Em torno do apoio (momento negativo), a região comprimida da seção transversal é a inferior, comportando-se como retangular, com  $b_w = 10 \text{ cm}$  (Figura A1.7):

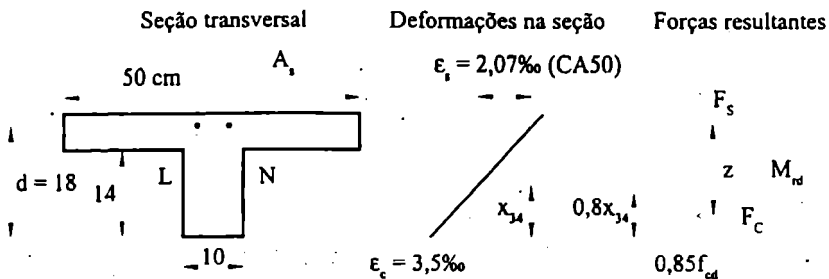


Figura A1.7 Esquema para cálculo do momento negativo resistido pela nervura.

O momento resistente, para concretos até a classe C50, é obtido quando  $x/d = 0,45$  para atender a condição de ductilidade da norma. Colocando  $x/d = 0,45$  ( $x = 0,45 \cdot d$ ) na equação 3.20, resulta:

$$M_{Rd} = F_c \cdot z = (0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot 0,8 \cdot x) \cdot (d - 0,4 \cdot x) = b_w \cdot f_{cd} \cdot 0,68 \cdot 0,45 \cdot d \cdot (d - 0,4 \cdot 0,45 \cdot d)$$

$$M_{Rd} = 0,10 \cdot \frac{20000}{1,4} \cdot 0,68 \cdot 0,45 \cdot 0,18 \cdot (0,18 - 0,4 \cdot 0,45 \cdot 0,18) = 11,61 \text{ kNm}$$

c2) Cálculo da largura da região maciça

Uma vez determinado o momento máximo resistido pela seção da nervura, basta encontrar no diagrama de momento fletor (considerando o elástico dado na Figura A1.6) a seção em que o momento fletor solicitante é igual ao resistido em serviço. O momento resistido em serviço é igual a:

$$M_R = M_{Rd} / 1,4 = 11,61 / 1,4 = 8,29 \text{ kNm}$$

A equação do momento (ver Figura A1.6), em que a distância  $x$  é medida a partir do apoio externo, é dada por:

$$R \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} + M = 0 \Rightarrow \frac{3 \cdot p \cdot \ell}{8} \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} + M = 0$$

Colocando os valores de  $p$  e  $\ell$ , resulta:

$$\frac{3 \cdot 4,10 \cdot 5,50}{8} \cdot x - \frac{4,10 \cdot x^2}{2} + M = 0 \Rightarrow 8,46 \cdot x - 2,05 \cdot x^2 + M = 0$$

e igualando ao momento resistente 8,29 kNm (negativo), em serviço, chega-se a:

$$x^2 - 4,13 \cdot x - 4,04 = 0$$

cujas raízes são:  $\begin{cases} x_1 = 4,95 \text{ m} \\ x_2 = -0,82 \text{ m} \Rightarrow \text{não serve!} \end{cases} \Rightarrow x = 4,98 \text{ m}.$

Assim, a região maciça de cada lado do apoio será, no mínimo:

$$\ell - x = 5,50 - 4,95 = 0,55 \text{ m} \Rightarrow \text{adotado } 55 \text{ cm de cada lado.}$$

Resulta, então, na laje detalhada na Figura A1.8, admitindo que a viga de apoio tenha 20 cm de largura:

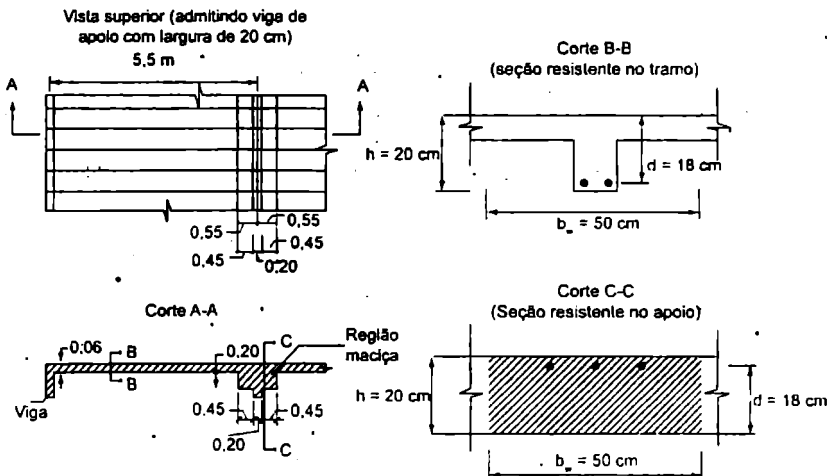


Figura A1.8 Esquema estrutural da laje com seção maciça próxima ao apoio central.

c3) Cálculo da armadura negativa, agora com  $b = 50 \text{ cm}$  (região maciça)

Para este cálculo, despreza-se a variação da inércia causada pela criação da região maciça.

$$M_{\text{neg}} = \frac{p \cdot \ell^2}{8} = \frac{4,10 \cdot 5,5^2}{8} = 15,50 \text{ kNm}$$

$$KMD = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{1,4 \cdot 1,4 \cdot 15,50}{0,50 \cdot 0,18^2 \cdot 20000} = 0,094 \text{ (toma-se } KMD = 0,095)$$

$KMD = 0,095 \Rightarrow$  Quadro 3.1  $\Rightarrow KZ = 0,9406$  e  $KX = x/d = 0,1485 < 0,45$  (limite para a relação  $x/d$  prescrita pela norma)

$$A_s = \frac{M_d}{KZ \cdot d \cdot f_{yd}} = \frac{1,4 \cdot 1,15 \cdot 15,50}{0,9406 \cdot 0,18 \cdot 50} = 2,95 \text{ cm}^2$$

c4) Armadura positiva

A armadura positiva deve ser calculada com o momento positivo determinado a partir do cálculo elástico, feito em a3, cujo valor é 8,72 kNm, e supondo seção retangular com a LN na mesa ( $b_w = b_f = 0,50 \text{ m}$ ):

$$KMD = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{1,4 \cdot 1,15 \cdot 8,72}{0,50 \cdot 0,18^2 \cdot 20000} = 0,053 \text{ (toma-se } KMD = 0,055)$$

$KMD = 0,055 \Rightarrow$  Quadro 3.1  $\Rightarrow KZ = 0,9665$  e  $KX = x/d = 0,0836 < 0,45$  (limite para a relação  $x/d$  prescrita pela norma)

$x = KX \cdot d = 0,0836 \cdot 18 = 1,50 \text{ cm} < h_f = 6 \text{ cm} \Rightarrow$  LN. na mesa.

$$A_s = \frac{M_d}{KZ \cdot d \cdot f_{yd}} = \frac{1,4 \cdot 1,15 \cdot 8,72}{0,9665 \cdot 0,18 \cdot 50} = 1,61 \text{ cm}^2$$

d) Terceira solução: laje contínua com tramos de 5,50 m e armadura dupla

Nesta solução, usa-se a laje com nervura contínua e armadura dupla para garantir a ductilidade da norma; o diagrama de momentos é o elástico, indicado na Figura A1.6.

d1) Cálculo da armadura negativa

Os momentos positivo e negativo são respectivamente  $M_{\text{máx}} = 8,72 \text{ kNm}$  e  $X = 15,50 \text{ kNm}$ . O momento resistente, para concretos até a classe C50, é obtido quando  $x/d = 0,45$  para atender a condição de ductilidade da norma, cálculo já feito em c1, e vale:

$$M_{Rd} = b_w \cdot f_{cd} \cdot 0,68 \cdot 0,45 \cdot d \cdot (d - 0,4 \cdot 0,45 \cdot d)$$

$$M_{Rd} = 0,10 \cdot \frac{20000}{1,4} \cdot 0,68 \cdot 0,45 \cdot 0,18 \cdot (0,18 - 0,4 \cdot 0,45 \cdot 0,18) = 11,61 \text{ kNm}$$

Este momento corresponde ao momento negativo resistido pela seção retangular, chamado agora apenas de  $M_1$ . O momento  $M_2$ , dado pela diferença entre o momento atuante e o resistido ( $M_2 = M_d - M_1$ ), deve ser absorvido por um binário de forças normais em que uma corresponde à armadura tracionada  $A_{st}$  e outra à comprimida  $A_{sc}$ . Considerando que a distância entre o CG da armadura comprimida e a borda da seção seja  $d' = 2 \text{ cm}$ , resulta:

Armadura tracionada:

$$A_s = \frac{M_1}{(d - 0,4 \cdot x_{0,45}) \cdot f_{yd}} + \frac{M_2}{(d - d') \cdot f_{yd}}$$

$$A_s = \frac{11,61}{(0,18 - 0,4 \cdot 0,45 \cdot 0,18) \cdot \frac{50}{1,15}} + \frac{(1,4 \cdot 15,5 - 11,61)}{(0,18 - 0,02) \cdot \frac{50}{1,15}} = 1,81 + 1,45 = 3,26 \text{ cm}^2$$

Armadura comprimida:

Para o cálculo da armadura comprimida  $A_s'$  é necessário conhecer antes a tensão na armadura comprimida  $f_s'$  e, portanto, a deformação  $\epsilon_s'$ , que pode ser obtido considerando que a seção permaneça plana no ELU:

$$\frac{0,35}{x_{0,45}} = \frac{\epsilon_s'}{(x_{0,45} - d')} \Rightarrow \epsilon_s' = \frac{0,35 \cdot (x_{0,45} - d')}{x_{0,45}} = \frac{0,35 \cdot (0,45 \cdot 0,18 - 0,02)}{0,45 \cdot 0,18} = 0,263\% >$$

$$\epsilon_{yd} = 0,207\%$$

como  $\epsilon_s' > \epsilon_{yd} \Rightarrow f_s' = f_{yd}$ , e então:

$$A_s' = \frac{M_2}{(d - d') \cdot f_{yd}} = \frac{1,4 \cdot 15,5 - 11,61}{(0,18 - 0,02) \cdot \frac{50}{1,15}} = 1,45 \text{ cm}^2$$

d2) Cálculo da armadura positiva

A armadura positiva é a mesma que o caso anterior, pois na seção do meio do vão, pelas hipóteses consideradas, nada se altera, e então:

$$A_s = \frac{M_d}{KZ \cdot d \cdot f_{yd}} = \frac{1,4 \cdot 1,15 \cdot 8,72}{0,9665 \cdot 0,18 \cdot 50} = 1,61 \text{ cm}^2$$

e) Quarta solução: laje com continuidade com redistribuição de momentos

Nesta solução, considera-se que, devido à fissuração do concreto, pode haver uma redistribuição dos momentos, diminuindo o momento negativo e aumentando o positivo em relação aos valores obtidos no cálculo elástico, dentro dos limites estabelecidos pela norma.

e1) Cálculo da armadura negativa

Considerando a máxima variação de momento permitida pela norma (supondo a estrutura de nós fixos) tem-se  $\delta = 0,75$ . Assim, o momento negativo redistribuído atuante passa a valer:

$$X_{redist} = 0,75 \cdot 15,50 = 11,625 \text{ kNm}$$

Para que se possa usar este momento, é preciso determinar um novo valor para a profundidade da linha neutra:

$$\xi = x/d = (\delta - 0,44)/1,25 = (0,75 - 0,44)/1,25 = 0,248$$

Desta maneira, o momento máximo resistente ( $M_1$ ) é dado por:

$$M_1 = b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd} \cdot (0,68 \cdot \xi - 0,272 \cdot \xi^2) = 0,10 \cdot 0,18^2 \cdot \frac{20000}{1,4} \cdot (0,68 \cdot 0,248 - 0,272 \cdot 0,248^2)$$

$M_1 = 7,03 \text{ kNm} < X_{\text{resist}} = 11,625 \text{ kNm} \Rightarrow$  necessário, portanto, empregar armadura dupla.

Considerando novamente que a distância entre o CG da armadura comprimida e a borda da seção seja  $d' = 2 \text{ cm}$ , resulta:

Armadura tracionada:

$$A_s = \frac{M_1}{(d - 0,4 \cdot x_{0,45}) \cdot f_{yd}} + \frac{M_2}{(d - d') \cdot f_{yd}}$$

$$A_s = \frac{7,03}{(0,18 - 0,4 \cdot 0,248 \cdot 0,18) \cdot \frac{50}{1,15}} + \frac{(1,4 \cdot 11,625 - 7,03)}{(0,18 - 0,02) \cdot \frac{50}{1,15}} = 1,00 + 1,33 = 2,33 \text{ cm}^2$$

Armadura comprimida:

Para o cálculo da armadura comprimida  $A'_s$  é necessário conhecer antes a tensão na armadura comprimida  $f'_s$  e, portanto, a deformação  $\epsilon'_s$ , que pode ser obtido considerando que a seção permaneça plana no ELU:

$$\frac{0,35}{x_{0,45}} = \frac{\epsilon'_s}{(x_{0,45} - d')} \Rightarrow \epsilon'_s = \frac{0,35 \cdot (x_{0,45} - d')}{x_{0,45}} = \frac{0,35 \cdot (0,45 \cdot 0,18 - 0,02)}{0,45 \cdot 0,18} = 0,263\% >$$

$$\epsilon_{yd} = 0,207\%$$

como  $\epsilon'_s > \epsilon_{yd} \Rightarrow f'_s = f_{yd}$ , e então:

$$A'_s = \frac{M_2}{(d - d') \cdot f_{yd}} = \frac{1,4 \cdot 11,625 - 7,03}{(0,18 - 0,02) \cdot \frac{50}{1,15}} = 1,33 \text{ cm}^2$$

e2) Cálculo da armadura positiva

Nesse caso, o momento máximo negativo atuante é o redistribuído determinado anteriormente ( $X_{redist} = 11,625 \text{ kNm}$ ). A partir do esquema estrutural montado na Figura A1.9, é determinado o momento positivo correspondente:

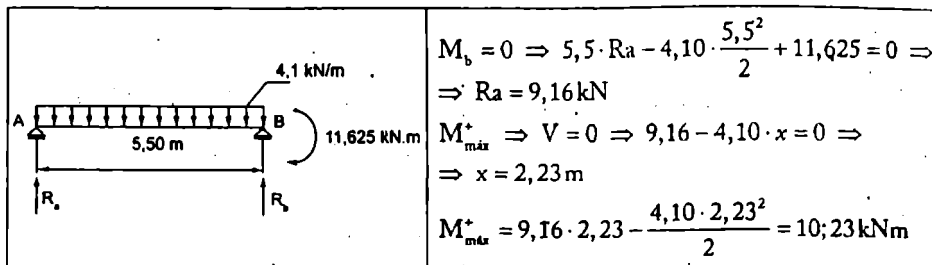


Figura A1.9 Esquema estrutural da laje sem seção maciça próxima ao apoio central e com momento negativo igual ao momento redistribuído.

O momento positivo é  $M_{\max}^* = 10,23 \text{ kNm}$ , e a armadura correspondente passa a ser, supondo a linha neutra passando na mesa ( $b_w = b_f = 0,50 \text{ m}$ ):

$$KMD = \frac{M_d}{b_f \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{1,4 \cdot 1,4 \cdot 10,23}{0,50 \cdot 0,18^2 \cdot 20000} = 0,062 \text{ (toma-se } KMD = 0,065)$$

$$KMD = 0,065 \Rightarrow \text{Quadro 3.1} \Rightarrow KX = 0,0995 \Rightarrow KZ = 0,9602$$

$$KX = x/d = 0,0995 < 0,45 \text{ (limite para a relação } x/d \text{ prescrita pela norma)}$$

$$x = KX \cdot d = 0,0995 \cdot 18 = 1,79 \text{ cm} < h_f = 6 \text{ cm}$$

$$\text{LN. na mesa} \Rightarrow \text{seção retangular} \Rightarrow b = b_f = 50,0 \text{ cm}$$

$$A_s = \frac{M_d}{KZ \cdot d \cdot f_{yd}} = \frac{1,4 \cdot 1,15 \cdot 10,23}{0,9602 \cdot 0,18 \cdot 50} = 1,90 \text{ cm}^2$$

No Quadro A1.1 faz-se um resumo dos resultados obtidos para as armaduras positiva e negativa nas diversas situações para a laje.

Quadro A1.1 Momentos fletores e armaduras positiva e negativa para as diversas situações.

Situação	Momento (kNm)	Largura da seção	Armadura
Laje com dois tramos isostáticos. Momento negativo = 0 Seção b)	$M_{\text{pos}}^* = 15,50 \text{ kNm}$	$b = b_f = 50,0 \text{ cm}$	$2,95 \text{ cm}^2$
	$M_{\text{neg}} = 0$	-	-

Quadro A1.1 Continuação...

Situação	Momento (kNm)	Largura da seção	Armadura
Laje contínua com região maciça. Momento do cálculo elástico. Seção c)	$M_{\text{pos}} = M_{\text{pos/elás}} = 8,72 \text{ kNm}$	$b = b_f = 50,0 \text{ cm}$	1,61 cm <sup>2</sup>
	$M_{\text{neg}} = M_{\text{neg/elás}} = 15,50 \text{ kNm}$	$b = 50 \text{ cm}$	2,95 cm <sup>2</sup>
Laje contínua, armadura dupla. Momento do cálculo elástico I. Seção d)	$M_{\text{pos}} = 8,72 \text{ kNm}$	$b' = b_f = 50,0 \text{ cm}$	1,61 cm <sup>2</sup>
	$M_{\text{neg}} = 15,50 \text{ kN.m}$	$b = b_w = 10 \text{ cm}$	(3,26 + 1,45) cm <sup>2</sup>
Laje contínua. Momento negativo igual ao redistribuído. Seção e).	$M_{\text{pos}} = 10,23 \text{ kNm}$	$b = b_f = 50,0 \text{ cm}$	(2,33 + 1,33) cm <sup>2</sup>
	$M_{\text{neg}} = M_{\text{redistrib}} = 11,625 \text{ kN.m}^2$	$b = b_w = 10 \text{ cm}$	1,90 cm <sup>2</sup>

## ANEXO 2

### QUADROS DE VÃOS MÁXIMOS E CONTRAFLECHAS PARA LAJES COM VIGOTAS PRÉ-MOLDADAS

É possível, uma vez fixada a geometria e armadura, calcular os momentos resistidos ou vão máximo que podem ser empregados montando quadros que permitem escolher os tipos de laje sem calculá-las.

Os primeiros quadros que surgiram indicavam para cada geometria e ação aplicada qual o máximo vão resistido. Entretanto, não eram adequadas, pois, além de não fornecerem a armadura necessária, não consideravam a condição de deformação excessiva. Sabe-se que a altura necessária de uma laje deve ser determinada em função do momento fletor último ou da flecha limite. A deformação final da laje deve ser calculada considerando os efeitos da fissuração e da fluência do concreto. Assim, a escolha da altura deve ser cuidadosa, de modo que as condições prescritas em norma para o estado de deformação excessiva sejam atendidas.

Os quadros existentes atualmente não levam em conta esses efeitos; os quadros a seguir, entretanto, foram elaborados de modo a se obter a altura e armadura de lajes pré-moldadas em função do vão e ação atuante, considerando as condições de colapso e de deformação excessiva, incluindo nesta última os efeitos da fissuração e fluência.

O coeficiente de fluência  $\varphi$  adotado nos quadros é obtido a partir da relação entre a deformação no tempo infinito (após cerca de 10 ou 15 anos) e a deformação imediata no concreto. Em todas as situações, adotou-se para o coeficiente de fluência  $\varphi$  o valor 2.

Outro detalhe importante é que, nos quadros, foi admitido que as lajes trabalham como elementos simplesmente apoiados, desprezando, a favor da segurança, os efeitos da continuidade.

Nos quadros A2.1 a A2.3, foram admitidas contraflechas para que as condições de deformação previstas na norma sejam atendidas. Os valores dessas contraflechas estão indicados nos quadros A2.4 a A2.6.

Quadro A2.1 Valores máximos (m) de vãos para lajes simplesmente apoiadas com altura de 10 cm (capa de 3 cm); ruptura e deformação excessiva atendidas.

Laje treliçada - $\beta_{10}$							
Classe e armadura (cm <sup>2</sup> )	Cargas (kN/m <sup>2</sup> )						
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	4,0	5,5
6 - 0,488	3,15	2,95	2,85	2,80	2,65	2,20	1,95
7 - 0,537	3,20	3,00	2,90	2,90	2,75	2,30	2,05
8 - 0,591	3,20	3,05	3,00	2,95	2,85	2,40	2,10
9 - 0,650	3,25	3,10	3,05	3,00	2,85	2,55	2,20
10 - 0,715	3,30	3,20	3,15	3,05	2,90	2,65	2,35
11 - 0,787	3,35	3,25	3,25	3,10	2,95	2,70	2,45
12 - 0,865	3,40	3,35	3,35	3,15	3,05	2,75	2,55
13 - 0,952		3,40	3,40	3,20	3,10	2,80	2,60
14 - 1,047		3,50	3,45	3,30	3,15	2,85	2,65
15 - 1,152			3,50	3,35	3,25	2,95	2,75
16 - 1,267			3,60	3,45	3,30	3,00	2,80
17 - 1,394			3,65	3,50	3,40	3,10	2,85
18 - 1,533			3,75	3,60	3,45	3,15	2,95
19 - 1,686			3,85	3,65	3,55	3,25	3,00
20 - 1,855				3,75	3,65	3,30	3,10
21 - 2,040				3,85	3,70	3,40	3,15
22 - 2,224				3,95	3,80	3,50	3,25
23 - 2,469					3,90	3,55	3,35
24 - 2,716					4,00	3,65	3,40

Intereixo = 50 cm; peso próprio = 1,11 kN/m<sup>2</sup>;  $f_{ck} = 20$  MPa.

Quadro A2.2 Valores máximos (m) de vãos para lajes simplesmente apoiadas com altura de 12 cm (capa de 4 cm); ruptura e deformação excessiva atendidas.

Laje treliçada - $\beta_{11}$							
Classe e armadura (cm <sup>2</sup> )	Cargas (kN/m <sup>2</sup> )						
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	4,0	5,5
6 - 0,488	3,75	3,55	3,25	3,00	2,80	2,40	2,10
7 - 0,537	3,80	3,60	3,40	3,15	2,95	2,50	2,20
8 - 0,591	3,85	3,65	3,50	3,30	3,10	2,60	2,30
9 - 0,650	3,90	3,70	3,55	3,40	3,20	2,70	2,40
10 - 0,715	3,95	3,75	3,60	3,45	3,30	2,80	2,50
11 - 0,787	4,05	3,80	3,65	3,50	3,40	2,85	2,55
12 - 0,865	4,10	3,90	3,70	3,55	3,45	2,95	2,65
13 - 0,952	4,15	3,95	3,75	3,65	3,50	3,00	2,70
14 - 1,047	4,25	4,05	3,85	3,70	3,55	3,10	2,80
15 - 1,152	4,35	4,10	3,90	3,75	3,65	3,20	2,85
16 - 1,267		4,20	4,00	3,85	3,70	3,30	2,95
17 - 1,394			4,10	3,95	3,80	3,45	3,05
18 - 1,533			4,20	4,05	3,90	3,55	3,15
19 - 1,686			4,30	4,10	4,00	3,65	3,25
20 - 1,855			4,40	4,20	4,05	3,75	3,35
21 - 2,040				4,30	4,15	3,80	3,45
22 - 2,244				4,45	4,30	4,00	3,55
23 - 2,469				4,55	4,40	4,00	3,65
24 - 2,716				4,65	4,50	4,10	3,80
25 - 2,987				4,75	4,60	4,20	3,90
26 - 3,266				4,85	4,70	4,30	4,00
27 - 3,615				5,00	4,80	4,45	4,15

Intereixo = 50 cm; peso próprio = 1,41 kN/m<sup>2</sup>;  $f_{ck}$  = 20 MPa.

**Quadro A2.3** Valores máximos (m) de vãos para lajes simplesmente apoiadas com altura de 16 cm (capa de 4 cm); ruptura e deformação excessiva atendidas.

Laje treliçada - $\beta_{16}$							
Classe e armadura (cm <sup>2</sup> )	Cargas (kN/m <sup>2</sup> )						
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	4,0	5,5
6 - 0,488	4,20	4,00	3,70	3,40	3,20	2,75	2,45
7 - 0,537	4,40	4,20	3,85	3,60	3,35	2,85	2,55
8 - 0,591	4,60	4,40	4,05	3,75	3,50	3,00	2,65
9 - 0,650	4,80	4,65	4,25	3,95	3,70	3,15	2,80
10 - 0,715	4,95	4,70	4,45	4,10	3,85	3,30	2,95
11 - 0,787	5,00	4,75	4,55	4,30	4,05	3,45	3,05
12 - 0,865	5,05	4,85	4,65	4,45	4,25	3,65	3,20
13 - 0,952	5,15	4,90	4,70	4,55	4,40	3,75	3,35
14 - 1,047	5,25	5,00	4,80	4,60	4,45	3,85	3,50
15 - 1,152	5,35	5,10	4,85	4,70	4,55	4,00	3,55
16 - 1,267	5,45	5,20	4,95	4,80	4,65	4,10	3,65
17 - 1,394	5,55	5,30	5,05	4,90	4,70	4,25	3,80
18 - 1,533	5,70	5,40	5,15	5,00	4,80	4,35	3,90
19 - 1,686		5,55	5,30	5,10	4,90	4,50	4,00
20 - 1,855			5,40	5,20	5,05	4,65	4,15
21 - 2,040			5,55	5,35	5,15	4,75	4,25
22 - 2,244			5,70	5,45	5,30	4,85	4,40
23 - 2,469			5,80	5,60	5,40	5,00	4,55
24 - 2,716				5,75	5,55	5,10	4,70
25 - 2,987				5,90	5,70	5,25	4,85
26 - 3,266				6,00	5,80	5,35	5,00
27 - 3,615					6,00	5,50	5,15
28 - 3,976					6,15	5,65	5,25

Interseção = 50 cm; peso próprio = 1,61 kN/m<sup>2</sup>;  $f_{ck}$  = 20 MPa.

Quadro A2.4 Contraflecha (mm) utilizada para atendimento dos estados de deformação excessiva e limite último – laje  $\beta_{10}$ .

Contraflecha utilizada (mm) - $\beta_{10}$							
Classe	Cargas (kN/m <sup>2</sup> )						
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	4,0	5,5
06	0	0	3	6	8	8	7
07	0	0	3	8	9	8	8
08	0	1	5	9	9	9	8
09	0	2	6	9	8	9	8
10	0	3	8	9	9	9	8
11	0	4	10	10	9	9	8
12	0	5	11	10	10	9	8
13		6	11	10	10	9	8
14		7	11	11	10	9	8
15			11	10	11	10	9
16			12	11	11	9	9
17			11	11	11	10	9
18			12	12	11	10	9
19			13	11	12	11	9
20				12	12	10	10
21				12	12	11	10
22				13	12	11	10
23					13	11	11
24					13	12	11

**Quadro A2.5** Contraflecha (mm) utilizada para atendimento dos estados de deformação excessiva e limite último - laje  $\beta_{11}$ .

Contraflecha utilizada (mm) - $\beta_{11}$							
Classe	Cargas (kN/m <sup>2</sup> )						
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	4,0	5,5
06	11	10	10	9	4	0	0
07	12	11	11	10	5	0	0
08	12	11	11	10	7	1	0
09	12	11	11	11	8	1	0
10	12	12	12	11	9	3	0
11	13	12	12	11	11	3	1
12	13	13	12	11	11	4	2
13	13	13	11	12	11	5	2
14	14	13	12	12	11	6	3
15	14	13	12	11	12	7	3
16		13	13	12	11	8	4
17			13	13	12	10	5
18			14	13	13	11	6
19			14	13	13	12	7
20			14	13	13	12	8
21				13	13	12	9
22				15	14	12	9
23				15	15	13	10
24				15	15	13	11
25				15	15	13	12
26				15	15	14	12
27				16	15	15	13

**Quadro A2.6** Contraflecha (mm) utilizada para atendimento dos estados de deformação excessiva e limite último – laje  $\beta_{16}$ .

Contraflecha utilizada (mm) - $\beta_{16}$							
Classe	Cargas (kN/m <sup>2</sup> )						
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	4,0	5,5
06	14	14	14	10	5	0	0
07	14	14	13	13	5	1	0
08	15	15	13	13	7		0
09	15	15	14	14	8	2	0
10	16	15	14	14	10	2	1
11	16	15	14	14	11	3	1
12	15	16	15	14	14	4	1
13	16	15	15	15	14	5	2
14	17	16	16	14	14	6	3
15	17	17	15	15	15	8	3
16	17	17	16	16	15	9	4
17	18	17	16	16	15	11	6
18	19	17	16	17	15	12	7
19		18	17	17	15	14	8
20			17	17	17	15	9
21			18	18	17	15	10
22			19	17	18	16	12
23			18	18	17	17	12
24				19	18	16	14
25				19	19	17	15
26				19	18	17	16
27					20	18	17
28					20	19	17



## **ANEXO 3**

### **CONSIDERAÇÕES SOBRE O CÁLCULO DE LAJES MACIÇAS COM ANALOGIA DE GRELHA**

#### **A3.1 INTRODUÇÃO**

Devido à impossibilidade de resolver as placas com a equação fundamental, como visto no capítulo 7, durante muito tempo, e mesmo ainda hoje, o cálculo de pavimentos de edifícios compostos de lajes e vigas de concreto armado é feito de maneira simplificada, considerando-se as lajes como elementos isolados apoiados em elementos rígidos. Entretanto, com o avanço da informática, com microcomputadores cada vez mais potentes e velozes e programas de análise estrutural avançados, a situação é outra, pois é possível analisar o comportamento de um pavimento como um todo, e também lajes isoladas, levando em consideração a influência da flexibilidade dos apoios e da rigidez à torção, tanto das lajes como das vigas, sendo ainda possível incluir na análise a não linearidade física do concreto armado.

Entre os diversos processos que possibilitam a análise de pavimentos, com a consideração desses parâmetros, destaca-se o de analogia de grelha (ou grelha equivalente), o qual vem sendo muito usado, com grande aceitação no meio profissional, no cálculo de estruturas de concreto armado, e é adequado para programação computacional.

Além de permitir o cálculo integrado de um pavimento, o processo de analogia de grelha permite ainda que, fazendo-se apenas pequenas modificações em um mesmo conjunto de dados, se analise um mesmo pavimento em diferentes situações de esquema estrutural, propiciando, dessa maneira, ao projetista, rapidez na definição do sistema estrutural mais adequado a ser utilizado.

Serão comparados, para algumas situações, esforços e deslocamentos transversais de lajes isoladas e de lajes associadas obtidos a partir do emprego do processo de analogia de grelha com aqueles obtidos pelo emprego de quadros de lajes.

#### **A3.2 PROCESSO DE ANALOGIA DE GRELHA**

O processo baseia-se na substituição de um pavimento por uma grelha equivalente, onde as barras da grelha representam os elementos estruturais do pavimento (lajes e vigas). Este processo permite reproduzir o comportamento estrutural de pavimentos com praticamente qualquer geometria, seja ele composto de lajes de concreto armado maciças, com ou sem vigas, ou de lajes nervuradas. Dessa maneira, devem-se dividir as lajes em um número adequado de faixas, as quais terão larguras dependentes da geometria

e das dimensões do pavimento. Essas faixas podem ser substituídas por elementos de barras, obtendo-se uma grelha (equivalente) que representa o pavimento.

Como visto no capítulo 7, admite-se que as cargas distribuídas se dividem entre as barras da grelha de acordo com sua área de influência; as cargas podem ser consideradas uniformemente distribuídas ao longo das barras da grelha ou concentradas nos nós.

As características geométricas das barras da grelha equivalente são de dois tipos: as do elemento placa (laje) e as do elemento viga-placa (viga-laje). O cálculo da inércia à flexão dos elementos de placa é feito considerando-se uma faixa de largura  $b$ , a qual é dada pela soma da metade dos espaços entre os elementos vizinhos, e altura  $h$  (espessura da placa). A rigidez à torção ( $I_t$ ), no estágio I, segundo Hambly,<sup>50</sup> é o dobro da rigidez à flexão ( $I_f$ ). Assim, para um elemento de placa, pode-se escrever:

$$I_f = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (\text{A3.1})$$

$$I_t = 2 \cdot I_f = \frac{b \cdot h^3}{6} \quad (\text{A3.2})$$

Para o elemento viga-placa, na flexão, pode-se considerar uma parte da placa trabalhando como mesa da viga, configurando então, dependendo da posição, uma viga de seção "T" ou meio "T". Uma vez determinada a largura colaborante, a inércia à flexão da seção resultante pode ser calculada supondo a peça trabalhando tanto no estágio I como no II.

A inércia à torção do elemento viga no estágio I, de maneira simplificada, admitindo a viga retangular (altura  $h$ , largura  $b$ ), sem considerar a contribuição da laje adjacente, é:

$$I_t = \frac{h \cdot b^3}{3} \quad (\text{A3.3})$$

Como indicado em Carvalho,<sup>51</sup> pode-se considerar o valor da inércia à torção do elemento viga, no estágio II, igual a 10% daquele dado pela resistência dos materiais, e assim:

$$I_t = \frac{h \cdot b^3}{30} \quad (\text{A3.4})$$

Os valores do módulo de deformação longitudinal à compressão do concreto ( $E_c$ ), do módulo de deformação transversal do concreto ( $G_c$ ), e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ )

50 Hambly (1976).

51 Carvalho (1994).

relativo às deformações elásticas podem ser determinados a partir das recomendações da ABNT NBR 6118:2003.

### A3.3 SITUAÇÕES ANALISADAS

Para exemplificar o uso do processo de analogia de grelha na análise de pavimentos de edifícios, comparar os resultados com os obtidos pela teoria das placas delgadas, verificar a influência da rigidez à torção dos elementos, e do módulo de elasticidade transversal, foram resolvidos os exemplos a seguir.

Para a determinação dos esforços e deslocamentos das placas mediante a teoria das placas foram utilizados os quadros de lajes isoladas do capítulo 7, e para a resolução das grelhas foi empregado o programa GPLAN4 de Corrêa & Ramalho,<sup>52</sup> versão educativa, desenvolvido na Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

Em todas as análises, foram empregadas, além do peso próprio, uma sobrecarga permanente ( $g_2$ ) de  $1,0 \text{ kN/m}^2$ , e uma carga acidental ( $q$ ) de  $3,0 \text{ kN/m}^2$ , e as seguintes características para o concreto:

$$E_c = 3,20 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2;$$

$$G_c = 0,4 \cdot E_c = 1,28 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 \text{ (item 8.2.9 da ABNT NBR 6118:2003).}$$

**Análise 1.** Comparação entre os dois processos (analogia de grelhas e teoria das placas com quadros) para uma placa quadrada de  $3,0 \text{ m} \times 3,0 \text{ m}$  e  $8 \text{ cm}$  de espessura, suposta simplesmente apoiada no seu contorno e indeslocável verticalmente. Para a análise da placa com a analogia de grelhas, foi utilizada uma grelha equivalente composta de 25 nós e 40 barras (Figura A3.1), com espaçamento de  $75 \text{ cm}$  entre as barras nas duas direções.

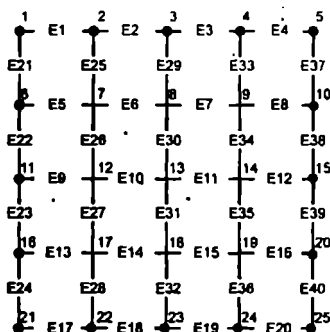


Figura A3.1 Grelha equivalente da placa da análise 1 (malha com 25 nós e 40 barras).

52 Corrêa & Ramalho (1987).

A carga total sobre a placa é  $p = 0,08 \cdot 25 + 1,0 + 3,0 = 6,0 \text{ kN/m}^2$ , e o carregamento da grelha foi determinado considerando as cargas uniformemente distribuídas nas suas barras, a partir da área de influência das barras. Assim:

- barras do contorno:  $p = \frac{0,75 \cdot 0,75}{4 \cdot 0,75} \cdot 6,0 = 1,125 \text{ kN/m}$
- barras internas:  $p = \frac{0,75 \cdot 0,75}{4 \cdot 0,75} \cdot 6,0 \cdot 2 = 2,250 \text{ kN/m}$

Os esforços e os deslocamentos no centro da placa (nó 13, barras E10, E11, E30 e E31), obtidos admitindo-se comportamento linear, estão apresentados no Quadro A3.1.

Quadro A3.1 Momento fletor (kNm/m) e flecha (mm) no centro da placa do exemplo 1.

Modelos de cálculo	$m_x = m_y$	Flecha
Analogia de grelha (A)	2,895	2,106
Quadros (B)	2,381	1,385
Razão (A/B)	1,216	1,521

Com os resultados do Quadro A3.1, observa-se que o momento fletor obtido pela utilização da analogia de grelha resultou maior que aquele obtido utilizando-se os quadros de placa, aproximadamente 22%, enquanto a flecha resultou maior em aproximadamente 52%. Destaca-se que neste caso, na analogia de grelhas, foram adotadas as mesmas simplificações da teoria das placas. Em análises com malhas mais densas, os resultados foram mais próximos daqueles da teoria das placas, mas sempre maiores.

**Análise 2.** Esta situação é idêntica à anterior, apenas alterando as dimensões em planta da placa, sendo agora retangular de  $3,00 \times 4,80$ . Para a analogia de grelha, foi utilizada uma grelha equivalente composta de 55 nós e 94 barras (Figura A3.2), com espaçamento entre as barras igual a 48 cm na maior direção da placa e 75 cm na menor direção.

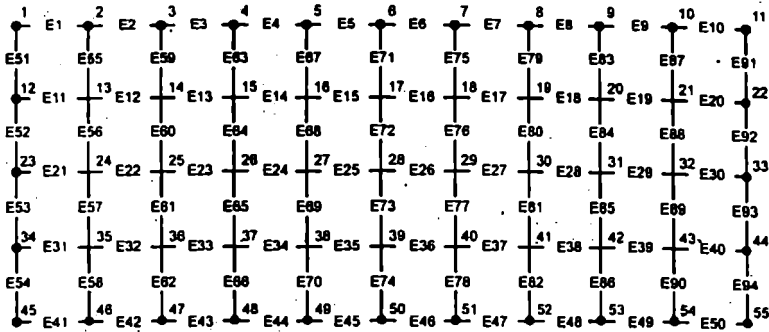


Figura A3.2 Grelha equivalente da placa retangular do exemplo 2 (55 nós e 94 barras).

O carregamento total sobre a placa é o mesmo da situação anterior, e as cargas também foram consideradas uniformemente distribuídas nas barras. Os esforços e os deslocamentos no centro da placa (nó 28, barras E25, E26, E72 e E73), obtidos considerando-se comportamento linear, estão no Quadro A3.2, destacando que, neste caso, os momentos nas duas direções são diferentes.

Quadro A3.2 Momento fletor (kNm/m) e flecha (mm) no centro da placa do exemplo 2.

Modelos de cálculo	$m_x$	$m_y$	Flecha
Analogia de grelha (A)	5,194	1,636	3,554
Quadros (B)	4,504	1,696	2,830
Razão (A/B)	1,153	0,965	1,256

Os resultados apresentados no Quadro A3.2 mostram que o momento fletor na menor direção da placa, obtido com a utilização da analogia de grelha, resultou maior que aquele obtido utilizando-se quadros, aproximadamente 15%, enquanto o momento fletor na maior direção da placa resultou 3,5% menor, e a flecha resultou maior em aproximadamente 26%. Os resultados parecem indicar que à medida que a laje se aproxima daquelas armadas em uma direção, os valores serão bastante próximos, o que é razoável, pois o comportamento passa a ser quase o de viga.

**Análise 3.** Para verificar a influência do módulo de deformação transversal do concreto nos resultados da analogia de grelha, foi analisada novamente a placa da primeira análise, para diversas malhas, com as relações  $G_c/E_c = 0,4$  e  $G_c/E_c = 0,2$ . As cargas foram consideradas uniformemente distribuídas nas barras das grelhas, admitindo-se comportamento linear. Os resultados estão apresentados no Quadro A3.3.

Quadro A3.3 Momento fletor (kN.m/m) e flecha (mm) no centro da placa do exemplo 1 para as relações  $G_c/E_c = 0,4$  e  $G_c/E_c = 0,2$ .

	Relação $G_c/E_c$			Relação $G_c/E_c$		
	0,2 (A)	0,4 (B)		0,2 (C)	0,4 (D)	
Malha da grelha	$m_x = m_y$	$m_x = m_y$	Razão (A/B)	Flecha	Flecha	Razão (C/D)
Malha 1 (75 x 75 cm)	3,308	2,895	1,143	2,359	2,106	1,120
Malha 2 (50 x 50 cm)	3,182	2,636	1,207	2,286	1,941	1,178
Malha 3 (30 x 30 cm)	3,073	2,450	1,254	2,205	1,799	1,226
Malha 4 (15 x 15 cm)	2,973	2,320	1,281	2,128	1,693	1,257

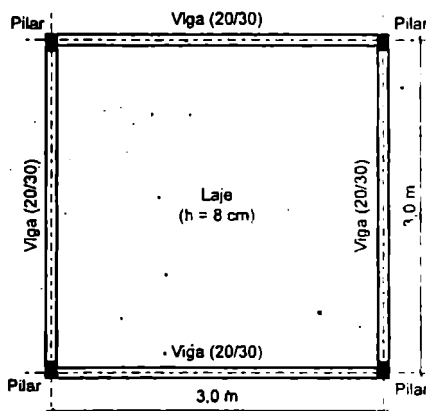
Os resultados indicam que o momento fletor e a flecha no centro da placa aumentaram com a redução da relação  $G_c/E_c$  de 0,4 para 0,2; este comportamento se explica pelo fato de que ao diminuir o valor do módulo de deformação transversal do concreto, diminui a rigidez à torção dos elementos da grelha e, com isso, há uma redução dos momentos torsores nas extremidades das barras; como o equilíbrio deve ser mantido, ocorre um acréscimo dos momentos fletores, e, também, da flecha no centro da placa.

**Análise 4.** Comparação da influência da deslocabilidade do apoio das placas, analisando a laje do exemplo 1, considerando agora que ela se encontra apoiada no contorno em vigas de seção  $20 \times 30$  cm, estando estas vigas apoiadas em pilares nas suas extremidades (Figura A3.3). Na analogia de grelha, foi utilizada uma malha  $15 \times 15$  (441 nós e 840 barras). As vigas de contorno da laje foram admitidas como retangulares, sem a contribuição da laje adjacente, e as inércias à flexão e à torção foram calculadas no eixo I. As cargas foram consideradas uniformemente distribuídas nas barras da grelha. Os esforços e os deslocamentos obtidos para o centro da placa estão apresentados no Quadro A3.4.

Com os resultados do Quadro A3.4, observa-se que o momento fletor obtido com a analogia de grelha é menor que o obtido com os quadros de placa em aproximadamente 27%, e a flecha é menor em aproximadamente 7%. Como a inércia à torção das vigas de contorno é elevada, maior que a própria inércia à flexão, nos nós correspondentes ao encontro dos elementos de placa com os elementos de viga (nós do contorno da grelha equivalente) surgem momentos fletores negativos elevados, contribuindo para que ocorra uma redução do momento fletor positivo e da flecha no centro da placa.

**Quadro A3.4** Momento fletor (kNm/m) e flecha (mm) no centro de uma placa quadrada apoiada em vigas deformáveis verticalmente,

Modelos de cálculo	$m_x = m_y$	Flecha
Analogia de grelha (A)	1,693	1,576
Quadros (B)	2,320	1,693
Razão (A/B)	0,730	0,931



**Figura A3.3** Placa quadrada apoiada em vigas deformáveis verticalmente.

**Análise 5.** Verificação da influência nos valores do momento fletor e da flecha no centro da placa do exemplo 1, com malha  $15 \times 15$  (441 nós e 840 barras), quando se admite a inércia à torção das vigas de contorno da placa no estágio II, mantendo inalterada a inércia à flexão das mesmas (estádio I). A inércia à torção das vigas, no estágio II, foi tomada como 10% da inércia à torção das vigas no estágio I, conforme Carvalho.<sup>53</sup> Os resultados estão no Quadro A3.5; nas duas situações, o cálculo foi efetuado com analogia de grelha.

**Quadro A3.5** Momento fletor (kNm/m) e flecha (mm) no centro de uma placa quadrada apoiada em vigas deformáveis e com inércia à torção no estágio I e no estágio II.

Situação das vigas de contorno	$m_x = m_y$	Flecha
Com inércia à torção no estágio II (A)	2,093	1,914
Com inércia à torção no estágio I (B)	1,693	1,576
Razão (A/B)	1,236	1,214

53 Carvalho (1994).

Observa-se que o momento fletor e a flecha no centro da placa aumentam significativamente quando se considera a inércia à torção das vigas de contorno da placa no estágio II; para o centro de uma placa de  $3,0 \times 3,0$  m e espessura de 8,0 cm, apoiada no contorno em vigas de  $20 \times 30$  cm, deformáveis verticalmente e com inércia à flexão no estágio I e inércia à torção no estágio II, verifica-se que o momento fletor é maior que o obtido com a inércia à torção destas mesmas vigas no estágio I, aproximadamente 24%; o mesmo ocorreu com a flecha, que é maior em aproximadamente 21%.

Para se observar a diferença entre o cálculo com os dois métodos, com a inércia à torção das vigas no estágio II na analogia de grelha, e os resultados da teoria das placas, por meio de quadros, montou-se o Quadro A3.6, cujos resultados mostram que o momento fletor obtido com a analogia de grelha é menor que o obtido com os quadros de placa em aproximadamente 10%, enquanto a flecha é maior em aproximadamente 13%.

Quadro A3.6 Momento fletor (kNm/m) e flecha (mm) no centro de uma placa quadrada apoiada em vigas deformáveis e com inércia à torção no estágio II para os dois processos.

Modelos de cálculo	$m_x = m_y$	Flecha
Analogia de grelha (A)	2,093	1,914
Quadros (B)	2,320	1,693
Razão (A/B)	0,902	1,131

Análise 6. Cálculo de um pavimento completo, de forma integrada, com o processo de analogia de grelha, diferentemente do cálculo clássico, que considera os elementos componentes do pavimento de forma isolada sem levar em conta a interação entre os mesmos; o pavimento é composto de quatro lajes, seis vigas e nove pilares, conforme a Figura A3.4. Os resultados são comparados com os obtidos utilizando-se quadros para cálculo de placas.

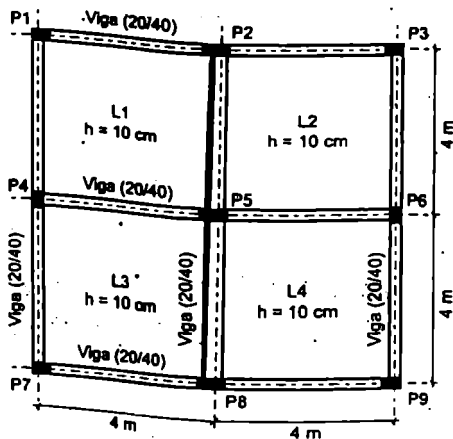


Figura A3.4 Forma do pavimento do exemplo 6.

A carga total neste pavimento difere da empregada nos demais pois a altura das lajes é de 10 cm, resultando uma carga  $p = 0,10 \cdot 25 + 1,0 + 3,0 = 6,5 \text{ kN/m}^2$ . A inércia à torção das vigas foi calculada no estágio II (10% da inércia à torção no estágio I), e a inércia à flexão foi calculada no estágio I. As vigas foram consideradas retangulares, sem a contribuição da laje adjacente. Na analogia de grelha, foi utilizada uma malha com 441 nós e 840 barras, com espaçamento de 40 cm entre as barras nas duas direções, e as cargas foram uniformemente distribuídas nas barras. Os resultados estão no Quadro A3.7.

Quadro A3.7 Momentos fletores (kNm/m) e flecha (mm) nas lajes do pavimento do exemplo 6.

Laje	$m_x = m_y$	$x_x = x_y$	Flecha
Grelha (L1 = L2 = L3 = L4) (A)	3,123	-6,325	2,043
Quadros (B)	2,922	-7,270	1,258
Razão (A/B)	1,069	0,870	1,624

Os resultados mostram que o momento fletor positivo obtido com a analogia de grelha é pouco maior que o obtido com os quadros de placa, aproximadamente 7%, enquanto o momento fletor negativo é menor em aproximadamente 13%, e a flecha é maior em torno de 62%.

Com a utilização do processo de analogia de grelha é possível calcular pavimentos de concreto armado de uma forma integrada, e, desse modo, a contribuição de cada elemento que compõe o pavimento fica corretamente caracterizada, cujos esforços e deslocamentos tendem a ser mais precisos e mais próximos dos valores reais.

Como conclusão principal, é possível afirmar que o cálculo com os quadros baseados na teoria das placas delgadas é útil para uma análise inicial ou um pré-dimensionamento, mas sempre que possível deve-se buscar processos em que as simplificações usualmente empregadas possam ser desconsideradas.

## REFERÊNCIAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *ACI 318-95*: building code requirements for structural concrete. Farmington Hills; Detroit, 1995.

\_\_\_\_\_. *ACI 318R-95*: commentary of building code requirements for structural concrete. Farmington Hills; Detroit, 1995.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DA INDÚSTRIA DE LAJES; SINDICATO DA INDÚSTRIA DE PRODUTOS DE CIMENTO DO ESTADO DE SÃO PAULO. *Manual técnico: sistema treliçado global*. São Paulo, 1998.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *ABNT NBR 6118:1980*: projeto e execução de estruturas de concreto armado. Rio de Janeiro, 1980.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 6119:1980*: cálculo e execução de laje mista. Rio de Janeiro, 1980. (cancelada e substituída pela *ABNT NBR 6118:2003*: projeto de estruturas de concreto – procedimento).

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 6120:1980*: cargas para o cálculo de estruturas de edificações – procedimento. Rio de Janeiro, 1980. (versão corrigida: 2000).

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 6123:1988*: forças devidas ao vento em edificações – procedimento. Rio de Janeiro, 1988. (versão corrigida 2 de 2013).

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 7197:1989*: projeto de estruturas de concreto protendido. Rio de Janeiro, 1989. (cancelada e substituída pela *ABNT NBR 6118:2003*: projeto de estruturas de concreto – procedimento).

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 12654:1992*: controle tecnológico de materiais componentes do concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 1992. (versão corrigida: 2000).

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 7480:1996*: barras e fios de aço destinados a armaduras para concreto armado: especificação. Rio de Janeiro, 1996.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR NM 67:1998*: concreto – determinação da consistência pelo abatimento do tronco de cone. Rio de Janeiro, 1998.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 14859-1:2002*: laje pré-fabricada: requisitos. Parte 1: lajes unidirecionais. Rio de Janeiro, 2002.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 14859-2:2002*: laje pré-fabricada: requisitos. Parte 2: lajes bidirecionais. Rio de Janeiro, 2002.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 14860-1:2002*: laje pré-fabricada – pré-laje: requisitos. Parte 1: lajes unidirecionais. Rio de Janeiro, 2002.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 14860-2:2002*: laje pré-fabricada – pré-laje: requisitos. Parte 2: lajes bidirecionais. Rio de Janeiro, 2002.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 14861:2002*: laje pré-fabricada – painel alveolar de concreto protendido: requisitos. Rio de Janeiro, 2002.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 14862:2002*: armaduras treliçadas eletrossoldadas: requisitos. Rio de Janeiro, 2002.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 5738:2003*: concreto – procedimento para moldagem e cura de corpos de prova. Rio de Janeiro, 2003. (emenda 1: 2008).

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 6118:2003*: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 7187:2003*: projeto de pontes de concreto armado e de concreto protendido – procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 8681:2003*: ações e segurança nas estruturas – procedimento. Rio de Janeiro, 2003. (versão corrigida: 2004).

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 14931:2004*: execução de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2004.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 9062:2006*: projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado. Rio de Janeiro, 2006.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 12655:2006*: concreto de cimento Portland – preparo, controle e recebimento – procedimento. Rio de Janeiro, 2006.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 15421:2006*: projeto de estruturas resistentes a sismos – procedimento. Rio de Janeiro, 2006.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 5739:2007*: concreto – ensaio de compressão de corpos de prova cilíndricos. Rio de Janeiro, 2007.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 6118:2007*: projeto de estruturas de concreto. – procedimento. Rio de Janeiro, 2007.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 7480:2007*: aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado – especificação. Rio de Janeiro, 2007.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 8522:2008*: concreto – determinação do módulo estático de elasticidade à compressão. Rio de Janeiro, 2008.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 8953:2009*: concreto para fins estruturais – classificação pela massa específica, por grupos de resistência e consistência. Rio de Janeiro, 2009. (versão corrigida: 2011).

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 12142:2010*: concreto – determinação da resistência à tração na flexão de corpos de prova prismáticos. Rio de Janeiro, 2010.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 7222:2011*: concreto e argamassa – determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos de prova cilíndricos. Rio de Janeiro, 2011.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 15200:2012*: projeto de estruturas de concreto em situação de incêndio. Rio de Janeiro, 2012.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR ISO 6892-1:2013*: materiais metálicos – ensaio de tração. Parte 1: método de ensaio à temperatura ambiente. Rio de Janeiro, 2013.

\_\_\_\_\_. *ABNT NBR 6118:2014: projeto de estruturas de concreto – procedimento*. Rio de Janeiro, 2014.

BARES, R. *Tablas para el cálculo de placas y vigas paredes*. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, 1972.

BORGES, J. U. A. *Critérios de projeto de lajes nervuradas com vigotas pré-fabricadas*. Dissertação de Mestrado. Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

BRANSON, D. E. Procedures for computing deflections. *ACI Journal*, Nova York, n. 65, set. 1968.

BUSCARIOLO, L. G.; SILVA, M. A. F.; CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. Estudo experimental do comportamento da região das mesas de lajes com nervuras parcialmente pré-moldadas: consideração da punção. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 5., junho de 2003. *Anais...* São Paulo, 2003.

CAIXETA, P. D. *Contribuição de lajes mistas pré-fabricadas com vigas treliçadas*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

CALAVERA, J. R.; PEIRETTI, H. C.; GOMEZ, J. A. F.; GONZALEZ, F. J. L. *Comportamiento hasta rotura de forjados isostáticos e hiperestáticos de viguetas armadas*. Madrid: Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos; Universidad Politécnica de Madrid, 1998.

CARVALHO, R. C. *Análise não linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1994.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R.; FURLAN JUNIOR, S.; FLÓRIO, M. C. Estudo experimental do comportamento à flexão e ao cisalhamento de lajes unidirecionais com vigotas pré-moldadas. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 30., 27 a 31 de maio de 2002. *Anais...* Brasília, 2002.

CARVALHO, R. C.; FURLAN JUNIOR, S.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. Reações nas vigas de apoio em pavimentos executados com lajes pré-moldadas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 40., *Anais...* Rio de Janeiro, 1988.

CARVALHO, R. C.; JUSTE, A. E.; MORAES, C. A. Diretrizes para a verificação do estado limite de deformação excessiva de pavimentos de concreto armado. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 27., *Anais...* São Carlos, 1997.

CARVALHO, R. C.; PARSEKIAN, G. A.; FIGUEIREDO FILHO, J. R.; MACIEL, A. M. Estudo da arte do cálculo das lajes pré-fabricadas com vigotas de concreto. In: 1<sup>o</sup> ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA-PROJETO-PRODUÇÃO EM CONCRETO PRÉ-MOLDADO. São Carlos, 2005.

CEB-FIP Model Code 1990: final draft. *Bulletin D'Information*, Lausanne, n. 203-205, 1991.

COMITÊ CT-301. *Prática recomendada IBRACON para estruturas de edifícios de nível 1: estruturas de pequeno porte*. São Paulo: IBRACON, s/d.

- CORRÊA, M. R. S.; RAMALHO, M. A. Sistema laser de análise estrutural. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE TECNOLOGIA DE CONSTRUÇÃO: SOFTWARE PARA O PROJETO DE EDIFÍCIOS, 5., *Anais...* São Paulo, 1987.
- DI PIETRO, J. E. Projeto, execução e produção de lajes com vigotas pré-moldadas de concreto. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1993.
- DROPPA JÚNIOR, A. Análise estrutural de lajes formadas por elementos pré-moldados tipo vigota com armação treliçada. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.
- EUROCODE 2. *Design of concrete structures*. Part 1: general rules and rules for buildings. Bruxelas: CEN, 1992. (ENV 1992-1-1).
- FIGUEIREDO FILHO, J. R.; MARINS NETO, J.; CARVALHO, R. C.; FURLAN JUNIOR, S. Estudo de pavimentos de lajes pré-moldadas: determinação das reações nas vigas do contorno. In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL, 29., 13 a 17 de novembro de 2000. *Anais...* Punta del Este, 2000.
- FIORIN, E. *Arranjos de armaduras em estruturas de concreto armado*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.
- FLÓRIO, M. C. *Projeto e execução de lajes unidirecionais com vigotas em concreto armado*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2003. Disponível em: <[http://www2.ufscar.br/interface\\_frames/index.php?link=http://www.bco.ufscar.br](http://www2.ufscar.br/interface_frames/index.php?link=http://www.bco.ufscar.br)>.
- FLÓRIO, M. C.; CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R.; FURLAN JUNIOR, S. Flechas em lajes com vigotas pré-moldadas considerando a fissuração e o uso da expressão de Branson. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 45., Vitória, *Anais...* Vitória, 2003.
- FONTES, F. F. Análise estrutural de elementos lineares segundo a NBR 6118:2003. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.
- FRANCA, A. B. M.; FUSCO, P. B. *As lajes nervuradas na moderna construção de edifícios*. São Paulo: AFALA; ABRAPEX, 1997.
- FURLAN JUNIOR, S. *Vigas de concreto com taxas reduzidas de armadura de cisalhamento: influência do emprego de fibras curtas e da protensão*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.
- FURLAN JUNIOR, S.; FIGUEIREDO FILHO, J. R.; CARVALHO, R. C.; BONFIM, D. A. Análise experimental em lajes pré-moldadas de concreto: a plastificação e os valores dos momentos negativos em elementos hiperestáticos. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUCTURAL, 30., 27 a 31 de maio de 2002. *Anais...* Brasília, 2002.
- FUSCO, P. B. *Introdução ao projeto estrutural*. São Paulo: McGraw-Hill, 1976.
- \_\_\_\_\_. *Estruturas de concreto: solicitações normais*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.

- \_\_\_\_\_. *Estruturas de concreto: solicitações tangenciais*. São Paulo: Escola Politécnica da USP, 1982/1984.
- \_\_\_\_\_. *Técnica de armar as estruturas de concreto*. São Paulo: Pini, 1995.
- GHALI, A.; FAVRE, R. *Concrete structures: stresses and deformations*. Londres: Chapman & Hall, 1986.
- GUERRIN, A. *Tratado de concreto armado*. São Paulo: Hemus, 2003.
- HAMBLY, E. C. *Bridge deck behaviour*. Londres: Chapman and Hall, 1976.
- ISAIA, G. C. (Ed.). *Concreto: ensino, pesquisa e realizações*. São Paulo: IBRACON, 2005/2006. 2 v.
- JOHANSEN, K. W. *Linhas de ruptura: teoria e prática*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1962.
- \_\_\_\_\_. *Yield-line formulae for slabs*. Londres: Cement and Concrete Association, 1972.
- JUSTE, A. E. *Estudo dos deslocamentos de pavimentos de edifícios de concreto armado*. São Carlos: DECiv/UFSCar, 1997. (relatório de iniciação científica FAPESP).
- JUSTE, A. E.; MORAES, C. A.; CARVALHO, R. C. Diretrizes para a verificação do estado limite de deformação excessiva de pavimentos de concreto armado. In: XXVII JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 27., Anais... São Carlos, 1997. v. 2, p. 735.
- KATAOKA, L. T. *Estudo experimental da deformação ao longo do tempo de lajes contínuas e simplesmente apoiadas executadas com vigotas pré-moldadas de concreto*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005. Disponível em: <[http://www2.ufscar.br/interface\\_frames/index.php?link=http://www.bco.ufscar.br](http://www2.ufscar.br/interface_frames/index.php?link=http://www.bco.ufscar.br)>.
- LAJES DO FUTURO. *Construção São Paulo*, São Paulo, n. 2616, p. 16-19, mar. 1998.
- LANGENDONCK, T. V. *Teoria elementar das charneiras plásticas*. São Paulo: Associação Brasileira de Cimento Portland, 1970.
- LEONHARDT, F. *Construções de concreto: verificação da capacidade de utilização*. Rio de Janeiro: Interciência, 1971. v. 4.
- LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. *Construções de concreto*. Rio de Janeiro: Interciência, 1977.
- LIBÂNIO, M. P. *Concreto armado: quadros e ábacos*. São Carlos: EESC-USP, 1983. n. 18/93.
- LIGHTFOOT, E.; SAWKO, F. Structural frame analysis by electronic computer: gride frameworks resolved by generalised slope deflection. *Engineering*, n. 187, p. 18-20, 1959.
- LIMA, J. C. O. *Boletim técnico Mediterrânea: sistema treliçado global*. 4. ed. Campinas, 1993.
- MARQUESI, M. L. G. *Ferramenta computacional para cálculo, verificação e detalhamento de seções transversais de concreto armado e protendido submetidas à flexão normal*. São Carlos: DECiv/UFSCar, 2010. (relatório de iniciação científica FAPESP).
- MARTINELLI, D. A. O.; MONTANARI, I.; SAVASSI, W. *Placas elásticas*. São Carlos: EESC-USP, 1986. n. 26/86.

MAZZILLI, A. R. M. *Influência da flexibilidade das vigas de apoio no cálculo de estruturas de edifícios*. Dissertação de Mestrado. Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1988.

MEDITERRÂNEA. Manual de tabelas práticas. *Noticiário Mediterrânea*, Campinas, ano 3, n. 4, set. 1992.

MESQUITA, V. V.; CARVALHO, R. C. *Escolha da altura de lajes pré-moldadas para pavimentos de edificações considerando as verificações do estado limite último e de deformação excessiva*. São Carlos, 1999. (relatório FAPESP).

MINISTERIO DE OBRAS PÚBLICAS, TRANSPORTES Y MEDIO AMBIENTE. *Instrucción para el proyecto y la ejecución de forjados unidireccionales de bormigón armado o pretensado (EF-96)*. Madrid, 1996.

MOLINA, V. E.; CARVALHO, R. C. *Programa PROPF*. VII CIC. São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 1999.

MONTOYA, P. J.; MESEGUER, A. G.; CABRÉ, F. M. *Hormigón armado*. 13. ed. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, 1991.

MORAES, C. A. *Estudo dos deslocamentos de pavimentos de edifícios de concreto armado*. São Carlos: DECiv/UFSCar, 1996. (relatório de iniciação científica FAPESP).

MÖRSCH, E. *Teoría y práctica del bormigón armado*. 6. v. Barcelona: Editorial Gustavo Gili, 1948.

MOURA, M. W.; MARCELINO, N. A. Avaliação da deformação em lajes bidirecionais de concreto armado. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 5., *Anais...* São Paulo, 2003.

PEIXOTO, E. M. et al. Os efeitos da vibração mecânica do concreto no comportamento à flexão de lajes com vigotas pré-moldadas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 44., *Anais...* Belo Horizonte, 2002.

PEREIRA, V. F. *Manual de projeto de lajes pré-moldadas treliçadas*. São Paulo: Associação dos Fabricantes de Lajes de São Paulo, 1998.

ROCHA, A. M. *Novo curso prático de concreto armado*. Rio de Janeiro: Científica, 1972. v. 1.

ROGGE, A. C.; CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R.; FURLAN JUNIOR, S.; TIRINTAN, M. R. A. Estudo experimental da deformação ao longo do tempo em lajes com vigotas pré-moldadas. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 30., 27 a 31 de maio de 2002. Brasília, *Anais...* Brasília, 2002.

RÜSCH, H. *Hormigón armado y bormigón pretensado*. Barcelona: Compañía Editorial Continental, S. A., 1975.

SANCHES, R. F. *Cálculo de esforços e deslocamentos em pavimentos de edifícios, considerando-se modelos próprios para o concreto armado*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

SANTINE, C. R. *Projeto e execução de lajes pré-fabricadas de concreto armado*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005. Disponível em: <[http://www2.ufscar.br/interface\\_frames/index.php?link=http://www.bca.ufscar.br](http://www2.ufscar.br/interface_frames/index.php?link=http://www.bca.ufscar.br)>.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY, K. *Theory of plates and shells*. Nova York: McGraw-Hill, 1959.

TIRINTAN, M. R. A.; ROGGE, A. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R.; CARVALHO, R. C.; FURLAN JÚNIOR, S. Estudo teórico da deformação devida à fluência do concreto em lajes com nervuras pré-moldadas. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 30., 27 a 31 de maio de 2002. Brasília, *Anais...*, Brasília, 2002.

TIRINTAN, M. R. A.; ROGGE, A. C.; FURLAN JUNIOR, S.; CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. Deformação devida à fluência do concreto em lajes com vigotas pré-moldadas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO, 45., Vitória. *Anais...* Vitória, 2003.

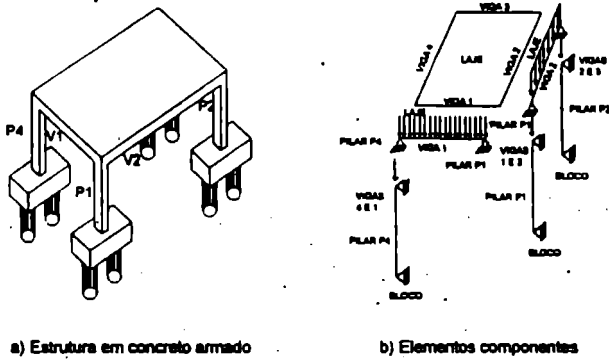


Figura 1.4 Discretização da estrutura da Figura 1.2.

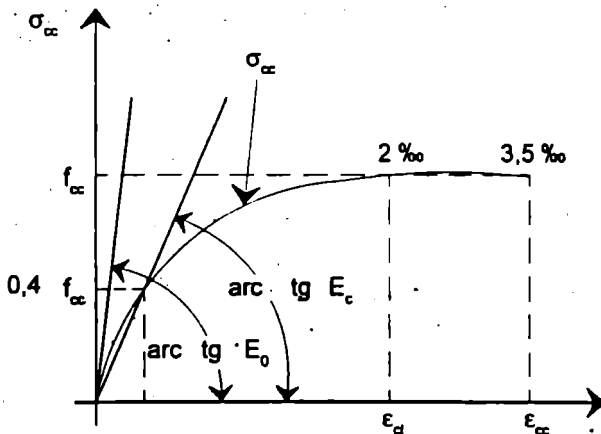


Figura 1.8 Diagrama tensão-deformação do concreto - adaptada de Fusco.

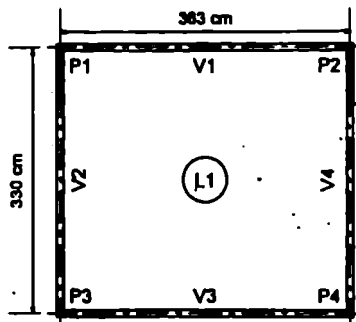


Figura 2.6 Planta do pavimento para análise do comportamento de laje pré-moldada.

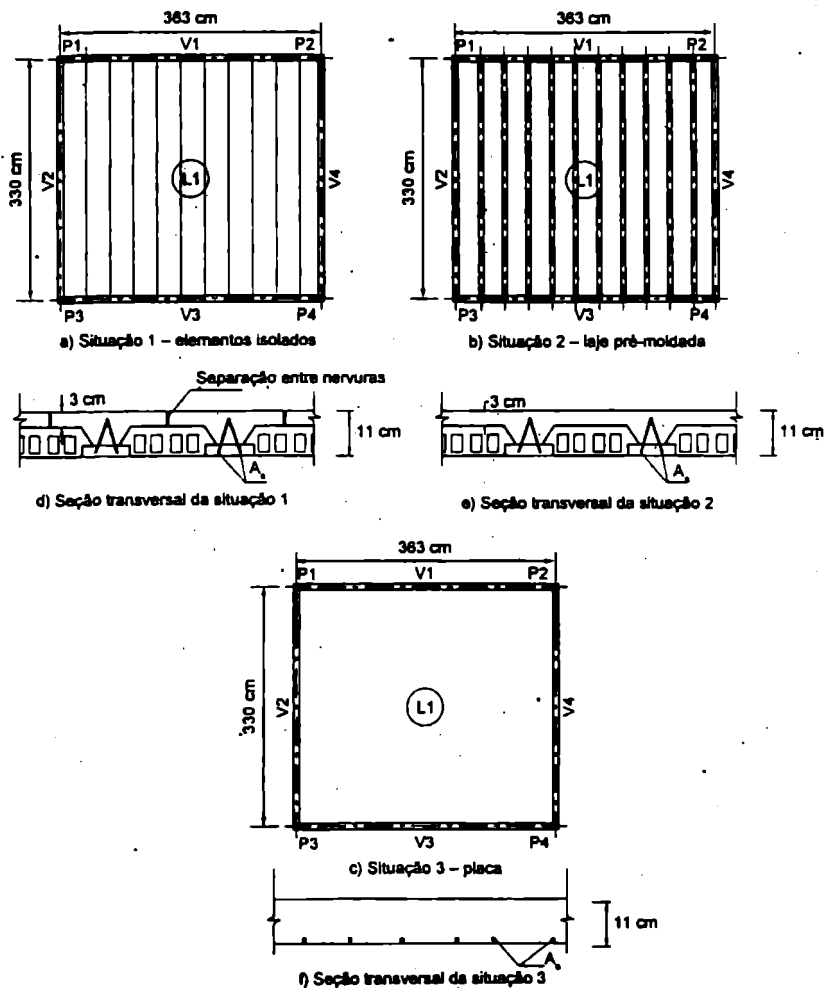


Figura 2.7 Situações analisadas: elementos isolados, laje pré-moldada e laje maciça.

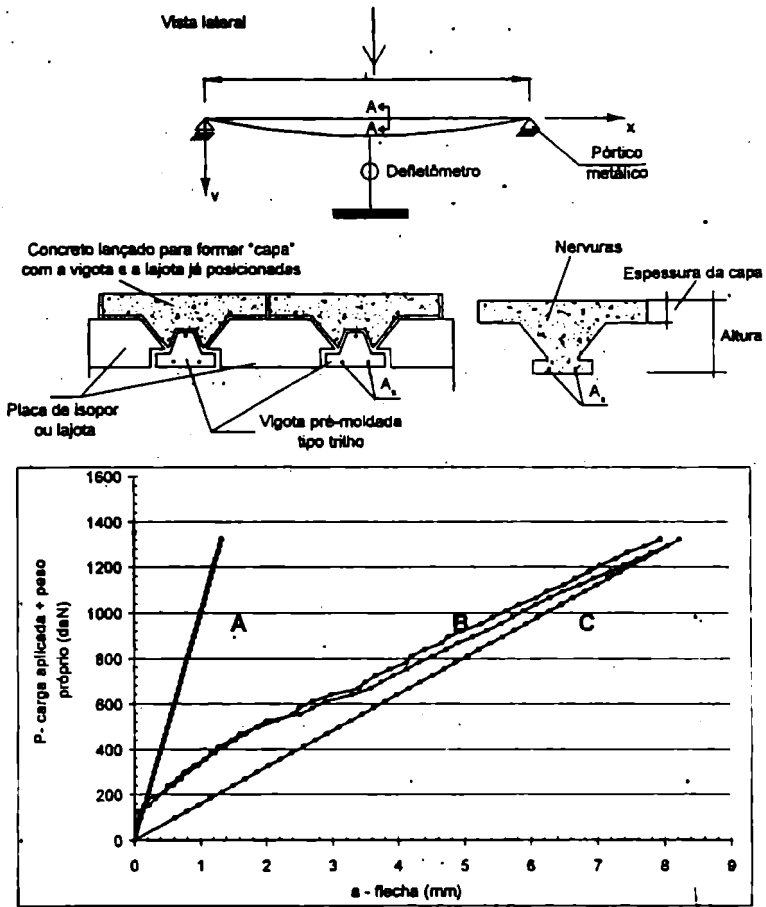


Figura 2.17 Esquema do ensaio de flexão e diagrama carga  $\times$  flecha de uma nervura de laje pré-moldada.

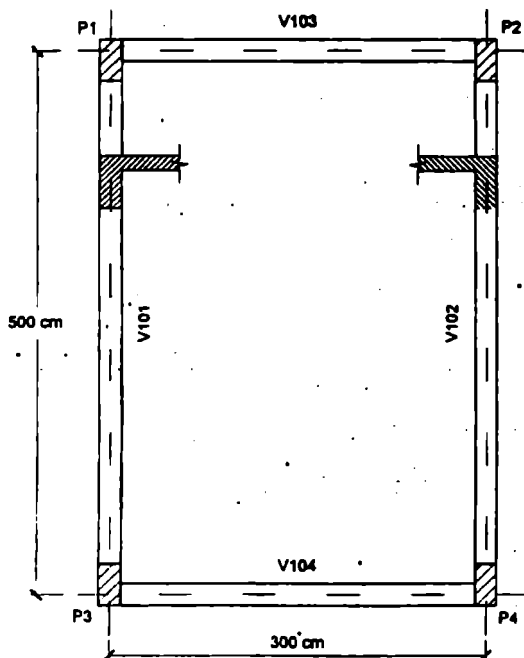


Figura 2.19 Planta de fôrmas do exemplo 1.

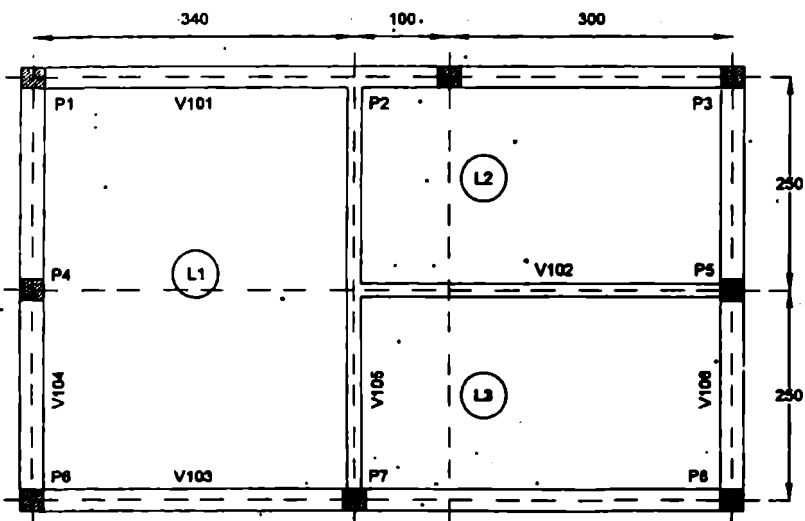


Figura 2.21 Planta de fôrmas do pavimento do exemplo 4.

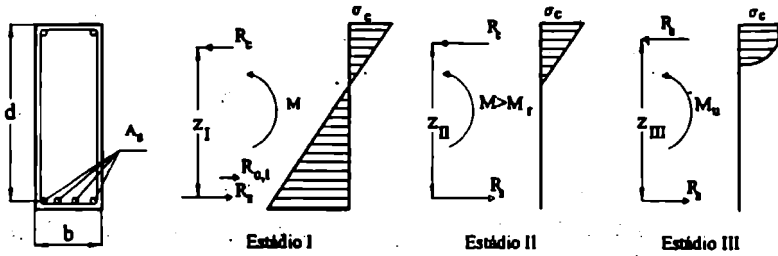


Figura 3.3 Comportamento da seção transversal de uma viga de concreto armado na flexão normal simples.

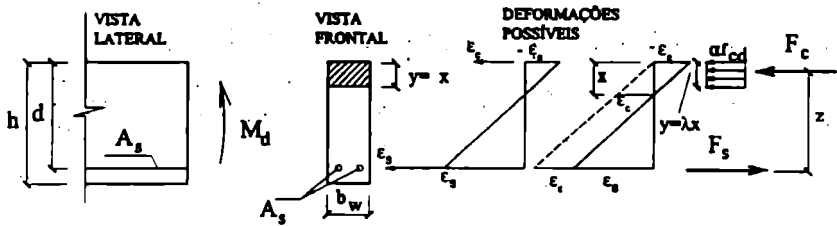


Figura 3.5 Diagramas de tensões no concreto no estado limite último para concretos de classes C50 a C90.

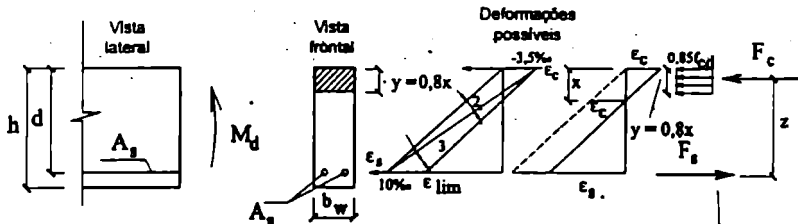


Figura 3.16 Mesma situação da Figura 3.15, com  $\epsilon_{sm}$  correspondente ao valor de  $x/d = 0,45$  imposta pela ABNT NBR 6118:2014 (aumento da ductilidade).

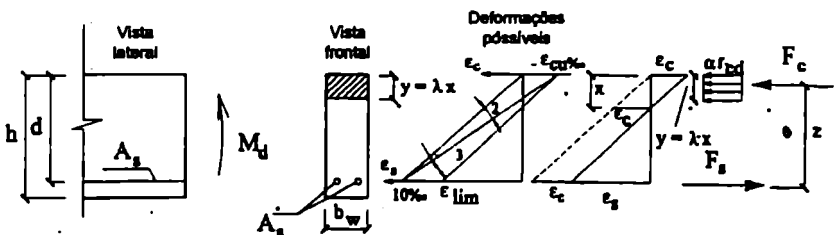


Figura 3.17 Mesma situação da Figura 3.16, mas para todas as classes de concreto.

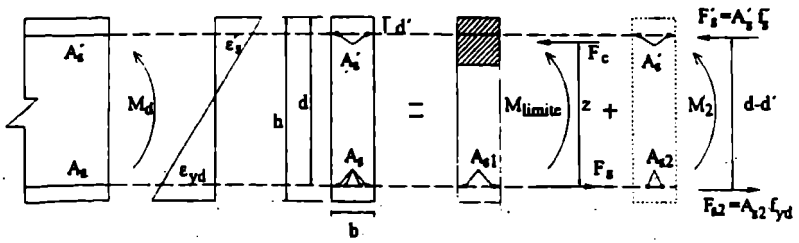


Figura 3.19 Seção de uma viga com armadura dupla.

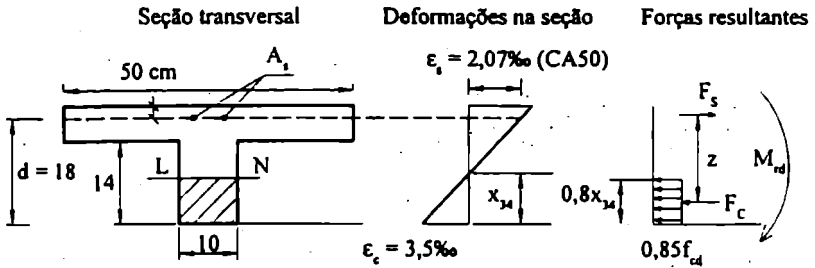


Figura A1.7 Esquema para cálculo do momento negativo resistido pela nervura.



